9) Primitives à connaître (suite)

$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$=argsh$x$+$C=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)+C$

(en effet, on a bien $\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)'=\frac{1+\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{x+\sqrt{1+x^2}}=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$).

Plus généralement si $a>0$:

$$\boxed{\int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}}=\ln\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right)+C}$$

10) Intégrales abéliennes (I)

Pour calculer $\int R\left(x,\sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx$ où R est une fraction rationnelle , $a,b,c,d\epsilon\mathbb{R}$ tels que $ad-bc\neq 0$, alors on pose : $t=\sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}$.

Exemples.

a) $\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}dx$ on pose $t=\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$

Or $\frac{1+x}{1-x}=t^2\Rightarrow(1+x)=t^2(1-x)\Rightarrow x=\frac{t^2-1}{1+t^2}\Rightarrow dx=\left(\frac{t^2-1}{1+t^2}\right)'dt=\frac{2}{(1+t^2)^2}\times 2tdt$

Donc $\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}dx=\underbrace{\int \frac{4t^2}{(1+t^2)^2}dt}_{\frac{4(t^2+1)-4}{(1+t^2)^2}=4\left(\frac{1}{1+t^2}-\frac{1}{(1+t^2)^2}\right)}=4\int \frac{dt}{(1+t^2)}-4\int \frac{dt}{(1+t^2)^2}=\frac{5}{2}\arctan(t)+\frac{\frac{1}{2}t}{(1+t^2)}+C$

$=\frac{5}{2}\arctan\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right)+\frac{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}}{\left(1+\frac{1+x}{1-x}\right)}+C=\frac{5}{2}\arctan\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right)+\frac{(1-x)\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}}{4}+C.$

b) $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x}-\sqrt[3]{1+x}}=?$

remarque : $\sqrt{1+x}=\left(\sqrt[6]{1+x}\right)^3et\sqrt[3]{1+x}=\left(\sqrt[6]{1+x}\right)^2$

donc on pose $t=\sqrt[6]{1+x}\Rightarrow x=t^6-1\Rightarrow dx=6t^5dt$

$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x}-\sqrt[3]{1+x}}=\int \frac{6t^5dt}{t^3-t^2}=6\int \frac{t^3}{t-1}dt=$

$6\int(t^2+t+1)dt+6\int \frac{dt}{t-1}=2t^3+3t^2+6t+6\ln(t-1)+C$

$=2\sqrt{1+x}+3\sqrt[3]{1+x}+6\sqrt[6]{1+x}+6\ln\left(\sqrt[6]{1+x}-1\right)+C.$

division euclidienne $\Rightarrow t^3=(t-1)(t^2+t+1)+1$

11) Intégrales abéliennes (II)

Pour calculer $\int R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$ où R est une fraction rationnelle, et $b^2-4ac<0$, on écrit $ax^2+bx+c=a((x-p)^2+q^2)$ et on pose : $x-p=q\,\mathrm{sh}(t)$

(On utilisera : $\mathrm{ch}^2(t) - \mathrm{sh}^2(t) = 1$.)

Exemple.

$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}}$

on écrit $x^2+x+1 = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$

On pose donc : $x+\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{sh}(t) \Leftrightarrow t = \mathrm{argsh}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)$

$\Rightarrow dx = \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{ch}(t)dt$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}} = \int \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{ch}(t)dt}{\sqrt{\frac{3}{4}\mathrm{sh}^2(t)+\frac{3}{4}}} = \int \frac{\mathrm{ch}(t)dt}{\sqrt{\mathrm{sh}^2(t)+1}} = \int \frac{\mathrm{ch}(t)}{\sqrt{\mathrm{ch}^2(t)}}dt = \int dt = t + C = \mathrm{argsh}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + C.$$

(où $\mathrm{argsh}(x) = \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$ est la fonction réciproque de $\mathrm{sh}(x)$)

Remarque : au lieu de poser $x-p = q\,\mathrm{sh}(t)$, on peut aussi poser $x-p = q\tan(t)$

Résumé du chapitre IX :

liste de primitives à connaître, une méthode pour calculer les primitives des fractions rationnelles, des méthodes de changements de variables pour se ramener à descalculs de primitives de fractions rationnelles : $t=e^x, t=\tan\left(\frac{x}{2}\right)$, etc + une méthode de linéarisation pour intégrer $\sin^p x \cos^q x$