

FONDAMENTAUX DES MATHÉMATIQUES II

PROGRAMME DE L'UNITÉ D'ENSEIGNEMENT :

Calcul matriciel. Opérations, inverse, opérations élémentaires. Calcul de l'inverse. Interprétation matricielle d'un système linéaire.

Espaces vectoriels. Définition d'un corps commutatif (on se limitera à \mathbb{Q} , \mathbb{R} et \mathbb{C} dans ce cours). Espaces vectoriels, sous-espaces vectoriels. Familles libres/génératrices/bases (on se limitera à des familles finies). Somme, somme directe, sous-espaces supplémentaires. Espaces vectoriels de dimension finie. Exemples d'espaces vectoriels : \mathbb{R}^n , espaces de fonctions, de suites (suites récurrentes linéaires d'ordre deux), $K_n[X]$.

Applications linéaires. Définition, matrice d'une application linéaire, noyau, image, caractérisation de l'injectivité. Image d'une famille libre/génératrice/base, rang, théorème du rang. Retour sur les matrices : rang/noyau d'une matrice, transposition, $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^t)$, trace, changement de base, matrices équivalentes, matrices semblables. Endomorphismes, exemples : projections, symétries, rotations.

Les réels. Nombres décimaux, rationnels, approximation des réels par des nombres décimaux à 10^n près. Borne supérieure/inférieure, application aux suites monotones (preuve) et au théorème des valeurs intermédiaires.

Fractions rationnelles. Forme irréductible d'une fraction rationnelle, fonction rationnelle, degré, partie entière, zéros, pôles, existence et unicité de la décomposition en éléments simples sur \mathbb{C} et \mathbb{R} (admis, on évitera toute technicité excessive dans les exemples).

Fonctions réelles. Réciproques des fonctions usuelles (arcsin, arccos, arctan). Comparaison locale des fonctions (o , O , \sim). Dérivées successives, fonctions de classe C^n et C^∞ .

Intégration. Fonctions en escaliers. Fonctions continues par morceaux. Intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment. Sommes de Riemann : si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est continue par morceaux alors

$$\frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(t) dt$$

Preuve dans le cas où f est C^1 . Primitives. Intégration par parties, changement de variables.

Formules de Taylor. Formule de Taylor reste intégrale à l'ordre n pour les fonctions C^{n+1} , inégalité de Taylor Lagrange et formule de Taylor-Young pour ces fonctions. Développements limités et exemple de développements asymptotiques.

Équations différentielles. Équations différentielles linéaires du premier ordre à coefficients non constants. Équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants.

← Programme officiel

ordre choisi :

- 1) Calcul matriciel $(\sim 8^h)$
- 2) Espaces vectoriel & déf. d'un corps commutatif $\sim 10^h 30$
- 3) Appli. linéaires $\sim 13^h$
- 4) Nombres réels $\sim 1^h 30$
- 5) fractions rationnelles $\sim 3^h$
- 6) fonctions réciproques des fonctions trigo. $\sim 2^h 30$
- 7) Intégration $\sim 12^h$
- 8) d.l. & formules de Taylor $\sim 8^h$
- 9) Équations différentielles $\sim 5^h 30$

Ce qui a été vu au 1^{er} semestre

FONDAMENTAUX DES MATHÉMATIQUES I

PROGRAMME DE L'UNITÉ D'ENSEIGNEMENT :

Calculs algébriques. Sommes, produits, sommes géométriques, inégalités dans \mathbb{R} , coefficients binomiaux.

Nombres complexes. Forme algébrique (partie réelle et imaginaire), opérations, conjugaison. Module, inégalité triangulaire, argument, exponentielle complexe, forme trigonométrique, formule d'Euler, formule de Moivre. Formule du binôme. Équations du second degré à coefficients complexes. Racines n -ièmes. Interprétation géométrique : affixe d'un point, d'un vecteur, interprétation du module, de l'argument, de la conjugaison, similitudes directes (en particulier translations, homothéties, rotations).

Bases de logique. Quantificateurs, équivalence, contraposée, négation, raisonnement par récurrence, par l'absurde. Ensembles. Inclusion, intersection, réunion, complémentaire, parties d'un ensemble E , produit cartésien.

Applications. Injectivité, surjectivité, bijectivité, composition, fonction réciproque.

Arithmétique. ($\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ hors programme) Divisibilité, diviseurs, multiples, division euclidienne, congruences, pgcd, ppcm, algorithme d'Euclide. Identité de Bézout, théorème de Gauss, équations $ax + by = c$. Nombres premiers, décomposition en facteurs premiers. Bases de la numération.

Polynômes sur \mathbb{R} ou \mathbb{C} . La construction est hors programme. Somme, produit, degré, valuation, polynômes unitaires. Divisibilité, division euclidienne, pgcd, factorisation en produit de polynômes irréductibles. Fonctions polynomiales. Racines, dérivation, racines multiples, relations coefficients racines, théorème de d'Alembert-Gauss (admis).

Pratiques sur les fonctions usuelles. On utilise ici les outils connus du lycée. ln, exp, fonctions puissances, fonctions trigonométriques et trigonométriques hyperboliques, partie entière, valeur absolue, dérivation des fonctions composées (admis à ce stade), parité, périodicité, monotonie, fonctions majorées, minorées, bornées, croissances comparées, calculs de limites, graphes, tableau de variations, asymptotes, tangente en un point, concavité/convexité du graphe, point d'inflexion.

Suites réelles. Définition, monotonie, suites minorées, majorées, bornées. Convergence, théorème d'encadrement, suites croissantes et majorées/décroissantes minorées (admis). Suites adjacentes. Suites arithmétiques, géométriques, arithmético-géométriques. Suites extraites, théorème de Ramsey, théorème de Bolzano-Weierstrass (pourra être admis).

Limites et continuité des fonctions. On mettra en avant la caractérisation séquentielle. Limites, limites à gauche et à droite, opérations, passage à la limite dans des inégalités. Théorème d'encadrement, théorème de la limite monotone. Continuité, continuité à gauche, à droite, prolongement par continuité, opérations. Théorème des valeurs intermédiaires, de la bijection, fonction continue sur un segment.

Dérivabilité. Dérivabilité, dérivabilité à gauche, à droite, interprétation géométrique, opérations. Extremum local et point critique. Théorème de Rolle et des accroissements finis.

2/2