Université Claude Bernard-Lyon 1 Semestre de printemps 2017-2018
Fondamentaux des mathématiques 2

Examen final session 2 du 22 juin 2018-durée 1h

Attention à la rédaction, pas de téléphone portable ni de calculatrice, on ne sort que une heure après le début de l'examen.

Exercice 1.

On rappelle que la dérivée de la fonction $x \to \arctan(x)$ est $x \to \frac{1}{1+x^2}$.

Soit f la fonction définie sur $]-1,1[$ par : $f(t) = \arctan\left(\frac{2t}{1-t^2}\right)$

1. Calculer $f'(t)$ et $f(0)$.
2. En déduire une expression plus simple de $f(t)$.

Correction exercice1

1. On pose $u(t) = \frac{2t}{1-t^2}$, pour tout $t \in]-1,1[$

$$u'(t) = \frac{2(1-t^2) - 2t(-2t)}{(1-t^2)^2} = 2\frac{1+t^2}{(1-t^2)^2}$$

$$1 + \big(u(t)\big)^2 = 1 + \left(\frac{2t}{1-t^2}\right)^2 = \frac{(1-t^2)^2 + 4t^2}{(1-t^2)^2} = \frac{1-2t^2+t^4+4t^2}{(1-t^2)^2} = \frac{1+2t^2+t^4}{(1-t^2)^2} = \frac{(1+t^2)^2}{(1-t^2)^2}$$

$$f'(t) = \frac{u'(t)}{1+\big(u(t)\big)^2} = 2\frac{1+t^2}{(1-t^2)^2}\frac{(1-t^2)^2}{(1+t^2)^2} = \frac{2}{1+t^2}$$

$$f(0) = \arctan(0) = 0$$

2. Pour tout $t \in]-1,1[$

$$f'(t) = 2\arctan'(t)$$

$]-1,1[$ est un intervalle, donc il existe $K \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $t \in]-1,1[$:

$$f(t) = 2\arctan(t) + K$$

On prend $t = 0$ pour en déduire que $K = 0$. Finalement

$$f(t) = 2\arctan(t)$$

Exercice 2.

1. Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{R}$ la fraction :

$$g(x) = \frac{1}{x(x^2+1)}$$

2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{x^3}\ln(1+x^2)$$

Montrer que

$$\int f(x)dx = -\frac{1}{2x^2}\ln(x^2+1) + \int g(x)dx$$

3. Déterminer une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}^{+*}$

Correction exercice2

1. Il existe a, b et c réels tels que :

$$\frac{1}{x(x^2+1)} = \frac{a}{x} + \frac{bx+c}{x^2+1}$$

On multiplie par x, puis $x = 0$.

$$a = \left[\frac{1}{x^2+1}\right]_{x=0} = 1$$

On multiplie par x^2+1, puis $x=i$

$$bi+c=\left[\frac{1}{x}\right]_{x=i}=\frac{1}{i}=-i\Rightarrow b=-1\quad \text{et}\quad c=0$$

Donc

$$\frac{1}{x(x^2+1)}=\frac{1}{x}-\frac{x}{x^2+1}$$

2. A l'aide d'une intégration par parties, pour tout $x>0$

$$\int f(x)dx=\int \frac{1}{x^3}\ln(1+x^2)\,dx$$

$\int \frac{1}{x^3}\ln(1+x^2)\,dx$

$u'(x)=\frac{1}{x^3}=x^{-3}$ $\qquad$ $u(x)=-\frac{1}{2}x^{-2}=-\frac{1}{2x^2}$

$v(x)=\ln(x^2+1)$ $\qquad$ $v'(x)=\frac{2x}{x^2+1}$

$\int f(x)dx=-\frac{1}{2x^2}\ln(x^2+1)\quad -\int -\frac{1}{2x^2}\frac{2x}{x^2+1}dx$

$$\int f(x)dx=-\frac{1}{2x^2}\ln(x^2+1)+\int \frac{1}{x(x^2+1)}dx=-\frac{1}{2x^2}\ln(x^2+1)+\int g(x)dx$$

3. Pour tout $x>0$

$$\int f(x)dx=-\frac{1}{2x^2}\ln(x^2+1)+\int\left(\frac{1}{x}-\frac{x}{x^2+1}\right)dx=-\frac{1}{2x^2}\ln(x^2+1)+\ln(x)-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+K,$$
$K\in\mathbb{R}$

Exercice 3.

Soit $\mathcal{B}=(e_1,e_2,e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$A=\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&1\\1&1&0\end{pmatrix}$$

1. Déterminer un vecteur v_1 tel que $\ker(u)=Vect(v_1)$.
2. Soient $v_2=(1,-1,0)$ et $v_3=(-1,0,-1)$. Exprimer $u(v_2)$ et $u(v_3)$ en fonction de v_2 et v_3.
3. Montrer que $\mathcal{B}'=(v_1,v_2,v_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
4. Déterminer la matrice M de u dans la base $\mathcal{B}'$.

Correction exercice3

1. Soit $x=(x_1,x_2,x_3)\in\ker(u)$, et $X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$ ses coordonnées dans la base $\mathcal{B}$.

$$u(x)=0_{\mathbb{R}^3}\Leftrightarrow AX=O\Leftrightarrow\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&1\\1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1-x_3=0\\x_2+x_3=0\\x_1+x_2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=x_3\\x_2=-x_3\\x_1+x_2=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=x_3\\x_2=-x_3\end{cases}\Leftrightarrow x=(x_3,-x_3,x_3)=x_3(1,-1,1)$$

$v_1=(1,-1,1)$ engendre $\ker(u)$, ce vecteur est non nul donc $\ker(u)=Vect(v_1)$

2. On pose

$$X_{v_2}=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}\quad\text{et}\quad X_{v_3}=\begin{pmatrix}-1\\0\\-1\end{pmatrix}$$

Les coordonnées de $u(v_2)$ dans la base $\mathcal{B}$ sont :

$$AX_{v_2}=\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&1\\1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}=X_{v_2}$$

Donc $u(v_2)=v_2$.

Les coordonnées de $u(v_3)$ dans la base $\mathcal{B}$ sont :

$$AX_{v_3}=\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&1\\1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\0\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\0\\-1\end{pmatrix}=X_{v_2}+X_{v_3}$$

Donc $u(v_3)=v_2+v_3$.

3. Quelques soient α,β et γ réels.

$$\alpha v_1+\beta v_2+\gamma v_3=0_{\mathbb{R}^3}\Leftrightarrow\alpha(1,-1,1)+\beta(1,-1,0)+\gamma(-1,0,-1)=(0,0,0)\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha+\beta-\gamma=0\\-\alpha-\beta=0\\\alpha-\gamma=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha+\beta-\gamma=0\\-\alpha-\beta=0\\\alpha=\gamma\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\beta=0\\-\alpha-\beta=0\\\alpha=\gamma\end{cases}\Leftrightarrow\alpha=\beta=\gamma=0$$

(v_1,v_2,v_3) est une famille libre dans un espace de dimension 3, c'est une base de $\mathbb{R}^3$.

4. D'après les questions précédentes $u(v_1)=0_{\mathbb{R}^3}, u(v_2)=v_2$ et $u(v_3)=v_2+v_3$, par conséquent

$$M=\begin{array}{cc} \begin{matrix}u(v_1)&u(v_2)&u(v_3)\end{matrix} & \\ \begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix} & \begin{matrix}v_1\\v_2\\v_3\end{matrix}\end{array}$$