Feuille 11 : Nombres réels

Exercice 1 Soit

$$X = \left\{ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \; p, q \in \mathbb{N}^* \right\}$$

1. Montrer que X est minoré et majoré.
2. En déduire que X possède une borne inférieure et une borne supérieure, et les déterminer.

Exercice 2

1. Montrer que pour tout $n, m \in \mathbb{N}^a st$,
$$0 < \frac{mn}{(mn)^2} \leq \frac{1}{4}$$
2. En déduire que
$$A = \left\{ \frac{mn}{(mn)^2} \; n, m \in \mathbb{N}^* \right\}$$
admet une borne inférieur et une borne supérieure, et les déterminer.

Exercice 3 Pour chacun des ensembles suivants, déterminer si ils possèdent un plus grand élément et/ou un plus petit élément, une borne inférieure et/ou une borne supérieure. Si oui, les déterminer.

$$A = \left\{ \frac{2^n}{2^n - 1} \; ; \; n \in \mathbb{N}^* \right\} \qquad B = \left\{ 2 + \frac{5}{n} \; ; \; n \in \mathbb{N}^* \right\}$$
$$C = \left\{ \frac{1}{1 - 2^{-n}} \; ; \; n \in \mathbb{N}^* \right\} \qquad D = \left\{ \frac{(-1)^n}{n} + \frac{2}{n} \; ; \; n \in \mathbb{N}^* \right\}$$
$$E = \left\{ \frac{x}{|x^3 - 1|} \; ; \; x \in]0, 1[\cup]1, \infty[\right\} \qquad F = \left\{ \frac{x^n}{|x^n - 1|} \; ; \; x \in]0, 1[\cup]1, \infty[, \; n \in \mathbb{N}^* \right\}$$

Exercice 4 Soient A et B deux parties non vides et bornées de $\mathbb{R}$, et $x \in \mathbb{R}$. On note

$$-A = \{-a; \; a \in A\} \qquad A + B = \{a + b; \; a \in A, b \in B\}$$
$$x + A = \{x + a; \; a \in A\} \qquad AB = \{ab; \; a \in A, b \in B\}.$$

1. Montrer que B est minoré si et seulement si A est majoré et que $\inf(B) = \sup(A)$.
2. Montrer que $\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$.
3. Montrer que $\sup(x + A) = x + \sup(A)$.
4. A-t-on toujours $\sup(AB) = \sup(A) \times \sup(B)$? Quelle condition faut-il ajouter sur A et B pour que ce soit vrai ?

Exercice 5 Soit A une partie non vide et bornée de $\mathbb{R}$. On pose $B = \{|x - y|; \; (x, y) \in A^2\}$.

1. Justifier que B est bornée.
2. Montrer que $\sup(B) = \sup(A) - \inf(A)$.

Exercice 6 Déterminer les ensembles suivants, et les mettre sous la forme d'un intervalle de $\mathbb{R}$ ou d'une réunion d'intervalles.

$$A_1 = \{x \in \mathbb{R} \; ; \; x^2 < 1 \} \qquad A_2 = \{x \in \mathbb{R} \; ; \; x^3 \leq 1 \}$$
$$A_3 = \left\{ x \in \mathbb{R} \; ; \; -1 < \frac{2x}{x^2 + 1} < 1 \right\} \qquad A_4 = \left\{ x \in \mathbb{R}^* \; ; \; \frac{1}{|x|} > 1 \right\}$$
$$A_5 = \left\{ x \in \mathbb{R} \; ; \; -1 < \frac{1}{x^2 - 1} < 1 \right\}$$

Exercice 7 Soient x et y deux nombres réels. Démontrer les inégalités suivantes :

$$\max(x,y) = \frac{1}{2}(x+y+|x-y|)$$
$$\min(x,y) = \frac{1}{2}(x+y-|x-y|).$$

Exercice 8 Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|x-1| \leq x^2 - x + 1$.

Exercice 9 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Vérifier que $(2+\sqrt{(3)})^n + (2-\sqrt{3})^n$ est un entier pair. En déduire que la partie entière de $(2+\sqrt{(3)})^n$ est un entier impair.

Exercice 10 Montrer que le nombre réel

$$\gamma = \sqrt[3]{27+6\sqrt{21}} + \sqrt[3]{27-6\sqrt{21}}$$

est un entier naturel que l'on déterminera.
Indication : On pourra montrer que γ est solution d'une équation de degré 3 à coefficients entiers.

Exercice 11 Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que $2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n} < \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n} - 2\sqrt{n-1}$.
2. En déduire un encadrement du nombre réel

$$S = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{10000}}$$