Feuille $n^0 1$: calcul matriciel

Exercice 1 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, calculer A^n.

Exercice 2 Soit $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ et soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$.

a) Calculer AX, ${}^tXA$ et ${}^tXAX$.

b) Calculer A^{-1}, inverse de la matrice A.

Exercice 3 Soit E l'ensemble des matrices de la forme $T = \begin{pmatrix} \alpha & 1-\alpha \\ \beta & 1-\beta \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, où α, $\beta \in [0,1]$.

a) Montrer que si $T \in E$, alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $T^n \in E$.

b) Soit $T = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Vérifier que $T \in E$ puis montrer par récurrence que $T^n = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+2^n & 1-2^{-n} \\ 1-2^{-n} & 1+2^n \end{pmatrix}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Puis, vérifier que $T^n \in E$.

c) Les joueurs d'un club de football sont partagés en deux équipes : une équipe A de titulaires et une équipe B de remplaçants qui ont toutes les deux le même nombre de joueurs. L'entraîneur change la composition de ces équipes après chaque partie, selon les perfomances des joueurs. Une étude statistique menée au cours des saisons précédentes permet d'estimer que

— si un joueur fait partie de l'équipe A, la probabilité qu'il joue la partie suivante est $\frac{3}{4}$;

— si un joueur fait partie de l'équipe B, la probabilité qu'il joue la partie suivante est $\frac{1}{4}$.

Enzo vient d'arriver dans le club, on note a_n la probabilité qu'il joue la partie n et $P_n = (a_n, 1-a_n)$. On suppose que $a_n = \frac{1}{10}$. Montrer que P_n vérifie la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N},\ P_{n+1} = P_n T \text{ et } P_0 = \left(\frac{1}{10}, \frac{9}{10}\right)$$

où T est la matrice définie plus haut.

d) Quelle est la probabilité qu'il joue la 1ère partie ? la partie n ?

Exercice 4 À tout réel t, on associe la matrice $M(t) = \begin{pmatrix} \mathrm{ch}t & \mathrm{sh}t \\ \mathrm{sh}t & \mathrm{ch}t \end{pmatrix}$.

a) Soient $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$. Calculer $M(t_1)M(t_2)$.

b) Soit $t \in R$. Montrer que $M(t)$ est inversible et donner une expression simple de $M(t)^{-1}$.

Exercice 5 Soit (U_n) une suite de vecteurs de $\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ définie par $U_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $U_{n+1} = AU_n$ où $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Montrer que $^\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n = A^n U_0$.

b) Calculer U_n en fonction de n.

Exercice 6 Soit (U_n) une suite de vecteurs de $\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ définie par $U_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $U_{n+1} = AU_n + B$ où $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

a) Montrer qu'il existe $C \in \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ tel que $C = AC + B$.

b) Soit $V_n = U_n - C$. Montrer que $^\forall n \in \mathbb{N}$, $V_n = A^n V_0$.

c) Calculer U_n en fonction de n.

Exercice 7

1. Si $A \in \mathscr{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathscr{M}_{3,6}(\mathbb{R})$, alors peut-on effectuer les opérations :
$$C = A + B,\ D = AB\ ?$$
Si c'est possible, quelle est la taille de C ou de D ?
2. Pour effectuer le produit de deux matrices A et B, il faut que
   i) A, B aient le même nombre de lignes ?
   ii) A, B aient le même nombre de colonnes ?
   iii) A ait autant de lignes que B de colonnes ?
   iv) A ait autant de colonnes que B de lignes ?

   Répondre par vrai ou faux à chaque fois.
3. Si $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, calculer AB et BA.

4. Si $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, calculer AB. Peut-on calculer BA ?

Exercice 8 Calculer l'inverse, s'il existe, des matrices suivantes :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 4 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 9 Soit $A = \begin{pmatrix} 13 & -8 & -12 \\ 12 & -7 & -12 \\ 6 & -4 & -5 \end{pmatrix}$.

a) Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b) Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

Exercice 10 Soit A une matrice carrée. On suppose que $A^3 - A^2 - I = 0$. Montrer que A est inversible et donner une formule simple pour A^{-1}.

Exercice 11 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Calculer $A^3 - A^2 + A - I_3$.

b) Exprimer A^{-1} en fonction de A^2, A, I_3.

c) Exprimer A^4 en fonction de A^2, A, I_3.

Exercice 12 On dit qu'une matrice carrée M est nilpotente s'il existe un entier $k \geq 1$ tel que $M^k = 0$. On dit qu'une matrice carrée M est unipotente s'il existe un entier $k \geq 1$ tel que $(M - I_n)^k = 0$. Soient $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

a) Montrer que si AB est nilpotente, alors BA aussi.

b) Montrer que si AB est unipotente, alors BA aussi.

Exercice 13 Soient $A, B \in \mathscr{M}_m(\mathbb{K})$ telles que $AB = BA$.

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^{n-k}B^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k}$.

b) Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$ lorsque $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Exercice 14 Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Écrire A sous la forme $B + I_3$, calculer B^n pour tout $n \in \mathbb{N}$ et en déduire A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$. Vérifier que $A^2 = 5A - 4I_3$.

b) En déduire que A est inversible et calculer A^{-1}.

Exercice 15 Soit $A = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$. Calculer A^{250}. *Indication : on pourra calculer B^k pour tout $k \in \mathbb{N}$ où $B = A - I_2$.*

Exercice 16 Soit $m \in \mathbb{R}^*$. On pose :$A = \begin{pmatrix} 0 & m & m^2 \\ \frac{1}{m} & 0 & m \\ \frac{1}{m^2} & \frac{1}{m} & 0 \end{pmatrix}$.

a) Calculer $(A + I_3)(A - 2I_3)$.

b) Soient B, C deux matrices carrées de mêmes tailles telles que $BC = 0$ et $C \neq 0$. Peut-on en déduire que $C = 0$?

c) Soient $B = \frac{1}{3}(A + I_3)$ et $C = \frac{1}{3}(A - 2I_3)$. Calculer B^2 et C^2 et en déduire B^n et C^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

d) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$, $A^n = 2^n B + (-1)^{n+1} C$.

Exercice 17 Soit $n \geq 1$ un entier et soient $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose que la somme des termes de chaque ligne de A et la somme des termes de chaque ligne de B valent 1. Montrer qu'il en est de même pour le produit AB.

Exercice 18 Montrer que la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ est inversible en calculant son inverse.