Université Claude Bernard Lyon 1
Semestre de printemps 2019-2020

UE Fondamentaux des Mathématiques II

Feuille 2 : Fonctions arcsin, arccos, arctan

Exercice 1-1

1. Montrer que $0 < \arccos \frac{3}{4} < \frac{\pi}{4}$
2. Résoudre $\arccos x = 2 \arccos \frac{3}{4}$

Exercice 1-2 On étudie la fonction f définie pour $x \in \mathbb{R}$ par

$$f(x) = \cos^3 x + \sin^3 x$$

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Calculer $f(x + \pi)$. Quelle conclusion sur le graphe de f peut-on en tirer ?
2. Etudier le signe de $\sin x - \cos x$ pour $x \in [0, \pi]$. On pourra raisonner géométriquement ou écrire $\sin x - \cos x$ sous la forme $A \sin(t + \phi)$.
3. Terminer l'étude de f.

Exercice 1-3 Calculer $\arcsin(\sin a)$, $\arccos(\cos a)$, $\arctan(\tan a)$, $\arccos(\sin a)$ pour $a \in \left\{ \frac{61\pi}{5}, \frac{76\pi}{5}, \frac{83\pi}{5} \right\}$.

Exercice 1-4 Représenter graphiquement sans l'aide de la calculette la fonction $x \mapsto \arcsin(\sin x)$.

Exercice 1-5 Que vaut $\arccos(\cos x)$ si $x \in [6\pi, 7\pi]$ puis si $x \in [25\pi, 26\pi]$?

Exercice 1-6 Votre calculatrice affirme que l'argument de $z = -3 + 4i$ est $-\arctan \frac{4}{3} + \pi$ ou $\arctan \frac{3}{4} + \frac{\pi}{2}$. Pourquoi ?

Exercice 1-7 L'application $\cos : [2\pi, 3\pi] \to [-1, 1]$ est-elle bijective ? Si oui, donner une expression de la fonction réciproque.

Exercice 1-8 Dans ce qui suit, on dit que f est équivalent à g en 0 si $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$. Trouver une fonction g de la forme $g(x) = ax + b$ telle que f soit équivalent à g en 0 dans chaque cas suivant : $f(x) = \arctan x$, $f(x) = \arcsin(x)$, $f(x) = \arccos(x)$.

Exercice 1-9 Simplifier les expressions $\tan(\arcsin x)$, $\cos(\arctan x)$ après avoir donné leur ensemble de définition.

Exercice 1-10 On pose $f : x \mapsto \arcsin\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$.

1. Montrer que l'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}^-$
2. Déterminer le ou les points de la courbe d'ordonnée nulle et préciser la tangente en ce ou ces points.
3. Etudier la fonction.

Exercice 1-11 Simplifier les expressions $\arccos x + \arcsin x$ et $\arccos x + \arccos(-x)$ après avoir donné leur ensemble de définition. On pourra dériver.

Exercice 1-12 Soit x, y des réels tels que $xy \neq 1$. Simplifier $\arctan \frac{x+y}{1-xy} - \arctan x - \arctan y$. On pourra dériver.

Exercice 1-13 Soit f la fonction définie sur $[\pi/2, \pi[$ par $f(x) = \frac{1}{\sin x}$. Montrer que f réalise une bijection de $[\pi/2, \pi[$ sur un ensemble à préciser. Déterminer f^{-1} à l'aide de la fonction arcsin.

Exercice 1-14 Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations suivantes

$$\arccos x = 2\arccos\frac{3}{4}, \qquad \arcsin\frac{1}{1+x^2} + \arccos\frac{3}{5} = \frac{\pi}{2}$$
$$\arccos\cos x = \arccos\frac{1}{4}, + \arccos\frac{1}{3}, \qquad \arccos x = 2\arccos(-1)$$
$$\arccos x = \arcsin 2x, \qquad \arcsin x + \arcsin\sqrt{1-x^2} = \frac{\pi}{2}$$
$$2\arcsin x = \arcsin(2x\sqrt{1-x^2})$$

Exercice 1-15 On cherche à résoudre l'équation $\arctan 2x + \arctan x = \frac{\pi}{4}$.

1. Démontrer que $f : x \mapsto \arctan 2x + \arctan x$ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle à préciser. En déduire que l'équation admet une unique solution α.
2. Déterminer α en utilisant la formule d'addition de la tangente.

Exercice 1-16 Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \arccos(1-2x^2)$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f et préciser en quels points f est continue
2. Dériver f en prenant soin d'étudier l'ensemble où f est dérivable
3. Dresser le tableau de variations de f et tracer son graphe
4. Sur chaque ensemble où f est dérivable, donner une expression plus simple de f

Exercice 1-17 Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \arccos(1-2\cos^4(x))$$

1. Montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que f est 2π périodique. Quelle est la partié de f ? En déduire un intervalle d'étude I.
3. Partout où cela ne pose pas de problème, calculer la dérivée de f. On l'exprimera sous la forme la plus simple possible.
4. Dresser le tableau de variations de f et tracer son graphe
5. Sur chaque ensemble où f est dérivable, donner une expression plus simple de f
6. Sur quel sous-ensemble de I la fonction f est-elle dérivable ? Préciser la valeur des limites de $f'(x)$ à droite au point d'abscisse 0 et à gauche au point d'abscisse π.
7. Dresser le tableau de variation de f.
8. Tracer son graphe sur trois périodes.