

Feuille 7 Analyse

Fonctions trigonométriques réciproques

Exercice 1.

1. Montrer que

$$0 < \arccos\left(\frac{3}{4}\right) < \frac{\pi}{4}$$

2. Résoudre

$$\arccos(x) = 2 \arccos\left(\frac{3}{4}\right)$$

Exercice 2.

1. Montrer que $2 \arctan\left(\frac{1}{3}\right) \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$
2. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

$$\sin(2t) = \frac{2 \tan(t)}{1 + \tan^2(t)}$$

3. En déduire que

$$\arcsin\left(\frac{3}{5}\right) = 2 \arctan\left(\frac{1}{3}\right)$$

Exercice 3.

1. Montrer que pour tout $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$

$$\sin(x) = \frac{\tan(x)}{\sqrt{1 + \tan^2(x)}} \quad \text{et} \quad \cos(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2(x)}}$$

2. Montrer que :

$$0 < \arctan\left(\frac{3}{4}\right) + \arctan\left(\frac{5}{12}\right) < \frac{\pi}{2}$$

3. Résoudre

$$\arcsin(x) = \arctan\left(\frac{3}{4}\right) + \arctan\left(\frac{5}{12}\right)$$

On rappelle que $\sin(a + b) = \sin(a) \cos(b) + \cos(a) \sin(b)$

Exercice 4. Soit f la fonction définie par $f(x) = \arcsin\left(\frac{1}{x}\right)$

1. Montrer que f est définie et continue sur $]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$.
2. Calculer les limites de f au bord de l'ensemble de définition.
3. Pour les valeurs où cela ne pose pas de problème calculer $f'(x)$, en déduire les variations de f .
4. Calculer

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f'(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x)$$

Que peut-on en déduire sur le graphe de f en $x = -1$ et $x = 1$?

5. Tracer le graphe de f .

Exercice 5. Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \arcsin(x) - \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$$

1. Sur quel ensemble cette fonction est-elle définie et continue ? (Soyez précis sur les justifications).

- Calculer la dérivée de f partout où cela ne pose pas de problème, sur quel ensemble est-elle dérivable ?
- Déterminer le signe de f sur son ensemble de définition.

Exercice 6.

$$f(x) = \arccos\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$$

- Montrer que f est définie et continue sur \mathbb{R} .
- Calculer la dérivée de f en tout point où cela ne pose pas de problème. Sur quel ensemble f est-elle dérivable ?
- Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
- Dresser le tableau de variation et dresser sommairement le graphe de f .
- Donner une expression plus simple de f pour $x < 0$, puis pour $x > 0$.

Exercice 7. Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \arccos(1 - 2x^2)$$

- Déterminer l'ensemble de définition et préciser l'ensemble où f est continue.
- Calculer la dérivée de f et préciser l'ensemble où f est dérivable.
- Dresser le tableau de variation de f et tracer son graphe.
- Sur chaque ensemble où f est dérivable, donner une expression plus simple de f .

Exercice 8. Soit f la fonction définie par : $f(x) = \arcsin(1 - 2\cos^4(x))$

- Montrer que f est définie et continue sur \mathbb{R} .
- Montrer que f est 2π périodique, quelle est la parité de f ? En déduire un intervalle d'étude I .
- Partout où cela ne pose pas de problème, calculer la dérivée de f . On l'exprimera sous la forme la plus simple possible.
- Sur quel sous-ensemble de I la fonction f est-elle dérivable ? Préciser la valeur des limites de $f'(x)$ à droite au point d'abscisse 0 et à gauche au point d'abscisse π .
- Dresser le tableau de variation de f
- Tracer son graphe sur trois périodes

Exercice 9.

Soit f la fonction définie par $f(x) = \arcsin\left(\frac{2x}{x^2+1}\right)$

- Déterminer l'ensemble de définition de f .
- Etudier la parité de f et en déduire un intervalle d'étude.
- Calculer f' la dérivée de f partout où cela ne pose pas de problème.
- Montrer que f n'est pas dérivable en $x = 1$. Que peut-on en déduire sur le graphe de f au point d'abscisse $x = 1$?
- Dresser le tableau de variation de f sur \mathbb{R}^+ , avec les limites et les valeurs de f aux points remarquables.
- Tracer le graphe de f sur \mathbb{R} .

Exercice 10.

Soit g la fonction définie sur \mathbb{R} par $g(t) = \arcsin(\sin(2t))$

Etudier la parité et la périodicité de g , sur quel intervalle peut-on l'étudier, puis montrer que $g\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = g(t)$, en déduire un axe de symétrie. Finalement étudier g sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ et tracer le graphe de g sur \mathbb{R} (au moins sur trois périodes). On donnera l'expression de g sur $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$