

## Feuille 5 : Applications linéaires

### Exercice 1

Parmi les fonctions suivantes, déterminer celles qui sont des applications linéaires :

1. La fonction  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  donnée par  $f(x, y) = (0, 2y)$ .
2. La fonction  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  donnée par  $f(x, y) = (x + 3, y)$ .
3. La fonction  $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}^*$  donnée par  $f(x) = 1/x$ .
4. La fonction  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  donnée par  $f(x, y) = (y^2, x - y)$ .
5. La fonction  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  donnée par  $f(x, y, z) = (x + z, y + z)$ .

### Exercice 2

Soient  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  des applications linéaires.

Montrer que  $x \mapsto f(x) + g(x)$  est linéaire et que  $x \mapsto f(x)g(x)$  n'est pas linéaire.

### Exercice 3. La Trace matricielle

Pour une matrice carré réelle  $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ , on définit l'application trace par  $Tr(A) = \sum_{i=1}^n a_{i,i}$ .

1. Posons

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calculer  $Tr(A)$ ,  $Tr(B)$  et  $Tr(A + B)$ .

2. Montrer que l'application trace est linéaire.

### Exercice 4.

Soit  $f$  l'homothétie de rapport  $\alpha \in \mathbb{R}^*$  de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}^2$  donnée par  $f(x, y) = \alpha(x, y)$ .

1. Montrer que c'est une application linéaire.
2. Déterminer  $\ker f$ .
3. Soit  $(x', y') \in \mathbb{R}$ , représenter graphiquement son antécédent par  $f$ . En déduire  $\text{Im} f$ .

### Exercice 5.

Soit  $R_\theta$  la rotation d'angle  $\theta \in [0, 2\pi]$  dans  $\mathbb{R}^2$ .

1. Vérifier graphiquement que  $R_\theta(\lambda x) = \lambda R_\theta(x)$ .
2. Vérifier graphiquement que  $R_\theta(x + y) = R_\theta(x) + R_\theta(y)$ .
3. Que peut-on en déduire sur  $R_\theta$  ?

### Exercice 6.

Soit  $f$  une application linéaire de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}^n$  tel que  $f^2 (= f \circ f) = f$  (on dit que  $f$  est un projecteur).

1. Montrer que  $\text{Id}_{\mathbb{R}^n} - f$  est aussi un projecteur.
2. Montrer que  $\ker(\text{Id}_{\mathbb{R}^n} - f) = \text{Im} f$ .
3. En déduire que  $\ker f$  et  $\text{Im} f$  sont supplémentaires.
4. Soit  $p$  définie sur  $\mathbb{R}^2$  par  $p(x, y) = (x, x)$ .

(i) Montrer que c'est une projection.

(ii) Déterminer graphiquement sur quelle droite projette  $p$

(iii) Déterminer graphiquement sur quelle droite projette  $\text{Id} - p$

### Exercice 7.

Soit  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  définie par  $f(x, y, z) = (-2x + y + z, x - 2y + z)$ .

1. Montrer que  $f$  est linéaire.
2. Donner une base de  $\ker(f)$ . En déduire le rang de  $f$ .

3. Donner une base de  $\text{Im}(f)$ .

**Exercice 8.**

Soit  $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$  l'application définie par  $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$ .

On note  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^4$ .

1. Calculer l'image des vecteurs de la base canonique par  $f$ . En déduire le rang de  $f$ .
2. Déterminer la dimension de  $\ker(f)$  et en donner une base.

**Exercice 9.**

Soit  $\Phi$  la fonction définie sur l'ensemble des fonctions définies et continues sur  $\mathbb{R}$  donnée par

$$\Phi : f \mapsto \left( x \mapsto \int_0^x f(t) dt \right).$$

1. Montrer que  $\Phi$  est linéaire.
2. Déterminer son noyau.
3. Déterminer son image.

**Exercice 10.**

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite. On considère la fonction définie dans l'espace des suites et donnée par

$$f((u_n)_{n \in \mathbb{N}}) = (u_{n+2} - u_{n+1} - 2u_n)_{n \in \mathbb{N}}$$

1. Montrer que  $f$  est une application linéaire.
2. Quelle relation doit vérifier les coefficients  $u_{n+2}$ ,  $u_{n+1}$  et  $u_n$  de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  pour être dans le noyau de  $f$  ?

**Rq.** pour une base de noyau, cf l'exercice du TD Espaces vectoriels sur les suites récurrentes linéaires d'ordre 2.

**Exercice 11.**

Soit  $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $C^1$ . On considère l'application définie dans l'espace des fonctions de classe  $C^1$ , à valeur dans l'espace des fonctions continues et donnée par

$$f(y) = y' + y$$

1. Montrer que  $f$  est une application linéaire.
2. Déterminer toutes les fonctions  $y$  de classe  $C^1$  telles que  $y' + y = 0$ .
3. En déduire une base du noyau de  $f$ .

**Exercice 12.**

Soit  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^3$ . Soit  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  l'application linéaire définie pour tout  $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  par  $f(u) = (6x - 4y - 4z, 5x - 3y - 4z, x - y)$ .

1. Déterminer un vecteur  $a \in \mathbb{R}^3$ , non nul, tel que  $\ker(f) = \text{Vect}(a)$ .
2. Soit  $b = e_1 + e_2$  et  $c = e_2 - e_3$ .
  - a. Calculer  $f(b)$  et  $f(c)$ .
  - b. En déduire que  $\{b, c\}$  est une base de  $\text{Im}(f)$ . (On peut utiliser une autre méthode.)
3. Déterminer une ou plusieurs équations caractérisant  $\text{Im}(f)$  (i.e. pour  $(x, y, z) \in \text{Im}f$  avoir des relations entre  $x, y, z$ ).
4. A-t-on  $\ker(f) \oplus \text{Im}(f) = \mathbb{R}^3$  ?

**Exercice 13.**

Soit  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^4$  et  $\mathcal{B}' = (f_1, f_2, f_3)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^3$ . Soit  $u : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$  l'application linéaire définie par

$$u(e_1) = f_1 - f_2 + 2f_3; \quad u(e_2) = 2f_1 + f_2 - 3f_3; \quad u(e_3) = 3f_1 - f_3; \quad u(e_4) = -f_1 - 2f_2 + 5f_3.$$

1. Déterminer l'image par  $u$  du vecteur  $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ .
2. Déterminer une base de  $\ker(u)$  et sa dimension.
3. Déterminer une base de  $\text{Im}(u)$  et le rang de  $u$ .

**Exercice 14.**

Soit  $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$  la base canonique de  $\mathbb{R}_2[X]$  (= l'ensemble des polynômes de degré 2). Soit  $u : \mathbb{R}_2[X] \rightarrow \mathbb{R}_2[X]$  défini par  $u(P) = P + (1 - X)P'$ .

1. Montrer que  $u$  est une application linéaire. De plus, montrer que  $\text{Im}(f) \subset \mathbb{R}_2[X]$ .
2. Déterminer  $\ker(u)$ .
3. Déterminer  $\dim(\ker(u))$  et le rang de  $u$ .
4. Calculer l'image de la base canonique de  $\mathbb{R}_2[X]$  par  $u$ . En déduire une base de  $\text{Im}(u)$ .

**Exercice 15.**

Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie  $p$ . Soit  $f$  une application linéaire de  $E$  dans  $E$ .

1. Soit  $k$  un entier. Montrer que  $\ker f^k \subset \ker f^{k+1}$ .
2. Comparer  $\dim(\ker f^k)$  et  $\dim(\ker f^{k+1})$ .
3. Soit  $k$  un entier. Montrer que  $\text{Im} f^{k+1} \subset \text{Im} f^k$ .
4. Comparer  $\dim(\text{Im} f^k)$  et  $\dim(\text{Im} f^{k+1})$ .

**Question hors-TD.** Déterminer la monotonie de la suite entière  $(\dim(\ker f^k))_k$ . En déduire qu'à partir d'un certain rang  $k_0$  la suite est constante. (Idem pour  $(\dim(\text{Im} f^k))_k$ )

**Exercice 16. - Question de cours**

Soit  $u : E \rightarrow E$  une application linéaire. Montrer que  $[u \text{ est injective}] \Leftrightarrow [\ker u = \{0_E\}]$ .

**Exercice 17.**

Soit  $f$  une application linéaire de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}^m$ .

1. Montrer que si  $v_1, v_2, \dots, v_p$  engendrent  $\mathbb{R}^n$  alors  $f(v_1), f(v_2), \dots, f(v_p)$  engendrent  $\text{Im}(f)$ .
2. Montrer que si  $f(v_1), f(v_2), \dots, f(v_p)$  forment un système libre alors  $v_1, v_2, \dots, v_p$  est libre aussi.
3. Montrer que si  $f$  est injective et si  $v_1, \dots, v_p$  est un système libre alors  $f(v_1), \dots, f(v_p)$  est libre aussi.

**Exercice 18.**

Soit  $u : E \rightarrow E$  une application linéaire et  $\lambda$  un réel. Soit  $E_\lambda = \ker(u - \lambda \text{id}_E)$ .

1. Calculer  $u(x)$  pour  $x \in E_\lambda$ . Montrer que  $E_\lambda$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ .
2. Soit  $F \subset E$  un sous-espace vectoriel de  $E$ . Montrer que  $u(F)$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ .
3. Si  $\lambda \neq 0$ , montrer que  $u(E_\lambda) = E_\lambda$ .

**Exercice 19.**

Soient  $E, F, G$  des  $\mathbb{R}$ -espaces vectoriels, avec  $f$  une application linéaire de  $E$  dans  $F$  et  $g$  une application linéaire de  $F$  dans  $G$ .

1. Montrer que  $[\text{Im} f \subset \ker g] \Leftrightarrow [g \circ f(x) = 0 \ \forall x \in E]$ .

**Exercice 20.**

Soit  $u : E \rightarrow E$  une application linéaire,  $E$  étant un espace vectoriel de dimension  $n$  pair. Montrer que les deux assertions suivantes sont équivalentes :

- (a)  $u^2(x) = 0$  pour tout  $x \in E$  et  $n = 2\dim(\text{Im}(u))$ .    (b)  $\text{Im}(u) = \ker(u)$ .