Correction de la fiche 5 sur les applications linéaires

Exercice 2
Soient $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ des applications linéaires.

1. Montrer que $h := f + g$ est une application linéaire.

2. Montrer que si le produit de f et g ne pas l'application nulle, alors il n'est pas linéaire.

Solution :
1. $\forall x, x' \in \mathbb{R}$ et $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ on a

$$h(x + \lambda x') \equiv (f + g)(x + \lambda x') = f(x + \lambda x') + g(x + \lambda x') = f(x) + \lambda f(x') + g(x) + \lambda g(x')$$

par la linéarité de f et g, et alors

$$h(x + \lambda x') = f(x) + g(x) + \lambda \left(f(x') + g(x')\right) = h(x) + \lambda h(x')$$

d'où h est linéaire.
2. Soit $k := f \cdot g$. Selon l'énnoncé, il existe un $x \in \mathbb{R}^*$ tel que $k(x) \neq 0$. (Remarque : La linéarité de f implique que $f(0) = 0$.) Soit $\lambda \in \mathbb{R}^* \backslash \{1\}$. Alors

$$k(\lambda x) \equiv f(\lambda x) \cdot g(\lambda x) = \lambda f(x) \lambda g(x)$$

par la linéarité de f et de g. Alors

$$k(\lambda x) = \lambda^2 k(x) \neq \lambda k(x)$$

selon les hypothèses sur x et λ.
Remarque : Une application linéaire $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est l'application nulle si et seulement s'il existe un $x_0 \in \mathbb{R}^*$ tel que $f(x_0) = 0$. (Preuve que cette condition est suffisante : $\forall x \in \mathbb{R}$ on a $f(x) = f(\frac{x}{x_0} x_0) = \frac{x}{x_0} f(x_0) = 0$ où, pour la deuxième égalité, on a utilisé que f soit linéaire). Alors, l'ennoncé peut rester comme il était si l'on ajoute que f et g soient des applications linéaires *non-nulles*.

Exercice 5
cf document joint

Exercice 6
Solution :
1. $(\mathrm{Id} - f)^2 = (\mathrm{Id} - f) \circ (\mathrm{Id} - f) = \mathrm{Id} - f - f + f^2 = \mathrm{Id} - 2f + f^2 = \mathrm{Id} - 2f + f = \mathrm{Id} - f$, où nous avons utilisé $f^2 = f$, car f est un projecteur. Donc $(\mathrm{Id} - f)^2 = \mathrm{Id} - f$ et $\mathrm{Id} - f$ est aussi un projecteur.
2. Montrons d'abord que $\ker(\mathrm{Id} - f) \subset \mathrm{Im} f$. Soit $x \in \ker(\mathrm{Id} - f)$. Cela signifie que $x - f(x) = 0$. Donc $x = f(x) \in \mathrm{Im} f$ par définition de $\mathrm{Im} f$.
Montrons ensuite que $\mathrm{Im} f \subset \ker(\mathrm{Id} - f)$. Soit $y \in \mathrm{Im} f$, par défintion de $\mathrm{Im} f$ il existe $x \in \mathbb{R}^d$, tel que $f(x) = y$. On calcule alors $f(y) = f(f(x)) = f^2(x) = f(x) = y$, car f est un projecteur et $f^2 = f$. De plus $(\mathrm{Id} - f)(y) = y - f(y) = 0$, d'après ce qui précède. Donc $y \in \ker(\mathrm{Id} - f)$.
En conclusion $\ker(\mathrm{Id} - f) = \mathrm{Im} f$.
3. Pour montrer que $\ker f$ et $\mathrm{Im} f$ sont supplémentaires nous devons montrer que $\ker f + \mathrm{Im} f = \mathbb{R}^d$ et $\ker f \cap \mathrm{Im} f = \{0\}$.
Montrons d'abord que $\ker f \cap \mathrm{Im} f = \{0\}$. Soit $y \in \ker f \cap \mathrm{Im} f$. Vu que $y \in \mathrm{Im} f$, il existe $x \in \mathbb{R}^d$, tel que $f(x) = y$. De plus $y \in \ker f$, donc $f(y) = 0$. De là on a :

$$0 = f(y) = f(f(x)) = f^2(x) = f(x) = y$$

Donc $y = 0$ et $\ker f \cap \mathrm{Im} f = \{0\}$.
Montrons ensuite que $\ker f + \mathrm{Im} f = \mathbb{R}^d$. Soit $x \in \mathbb{R}^d$, on a:

$$x = x - f(x) + f(x) = (x - f(x)) + f(x)$$

Or $x - f(x) = (\mathrm{Id} - f)(x) \in \mathrm{Im}(\mathrm{Id} - f)$. Mais en appliquant le résultat de la question précédente (avec $f \leftarrow (\mathrm{Id} - f)$, ce qui est légitime car d'après la première question, les deux sont des projecteurs), on a $\mathrm{Im}(\mathrm{Id} - f) = \ker(\mathrm{Id} - (\mathrm{Id} - f)) = \ker f$. Donc $x - f(x) \in \ker f$ et évidemment $f(x) \in \mathrm{Im} f$. Ainsi $x \in \ker f + \mathrm{Im} f$. Donc $\ker f + \mathrm{Im} f = \mathbb{R}^d$.
En conclusion $\ker f \oplus \mathrm{Im} f = \mathbb{R}^d$
4.
(i) D'une part $p(x, y) = (x, x)$. D'autre part $p^2(x, y) = p \circ p(x, y) = p(x, x) = (x, x)$. Donc $p^2 = p$ et p est

un projecteur.
(ii) L'image de p est la droite $\{(x,x)|x \in \mathbb{R}\}$ dans le plan $\mathbb{R}^2$.
(iii) Pour le projecteur $(\mathrm{Id}-p)$, nous avons $(\mathrm{Id}-p)(x,y) = (x,y) - p(x,y) = (x,y) - (x,x) = (0, y-x)$. On a que $\mathrm{Im}p \subset \{(0,y)|y \in \mathbb{R}\}$. De plus en prenant $(x,y) = (0,y)$, on a que $\mathrm{Im}(\mathrm{Id}-p) = \{(0,y)|y \in \mathbb{R}\}$.

Exercice 7 :

Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x,y,z) = (-2x+y+z, x-2y+z)$

(1) Montrons que f est linéaire :

$$f(\lambda(x,y,z)) = f(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = (-2\lambda x + \lambda y + \lambda z, \lambda x - 2\lambda y + \lambda z)$$
$$= (\lambda(-2x+y+z), \lambda(x-2y+z)) = \lambda(-2x+y+z, x-2y+z) = \lambda f(x,y,z)$$

$$f((x_1,y_1,z_1) + (x_2,y_2,z_2)) = f(x_1+x_2, y_1+y_2, z_1+z_2)$$
$$= (-2(x_1+x_2) + (y_1+y_2) + (z_1+z_2), (x_1+x_2) - 2(y_1+y_2) + (z_1+z_2))$$
$$= (-2x_1 + y_1 + z_1 + -2x_2 + y_2 + z_2, x_1 - 2y_1 + z_1 + x_2 - 2y_2 + z_2)$$
$$= (-2x_1 + y_1 + z_1, x_1 - 2y_1 + z_1) + (-2x_2 + y_2 + z_2, x_2 - 2y_2 + z_2) = f(x_1,y_1,z_1) + f(x_2,y_2,z_2)$$

(2) On a :

$$(x,y,z) \in ker(f) \Leftrightarrow f(x,y,z) = (0,0) \ i.e \ (-2x+y+z, x-2y+z) = (0,0)$$

On résout le système suivant :

$$\begin{cases} -2x+y+z=0 \\ x-2y+z=0 \end{cases} \Leftrightarrow (L_2 \leftarrow 2L_2 + L_1) \begin{cases} -2x+y+z=0 \\ -3y+3z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=z \\ y=z \end{cases}$$

On a donc $u \in ker(f) \Leftrightarrow u = (z,z,z) = z(1,1,1) \Leftrightarrow ker(f) = Vect(1,1,1)$. Le vecteur (1,1,1) est une base. On applique le théorème du rang :

$$dim(\mathbb{R}^3) = rg(f) + ker(f) \Leftrightarrow rg(f) = 3 - 1 = 2$$

.

(3) On considère la famille $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ qui est une base et donc engendre $\mathbb{R}^3$; la famille $\{f(e_1), f(e_2), f(e_3)\} = \{(-2,1),(1,-2),(1,1)\}$ engendre $Im(f)$. Cette famille n'est pas libre car $rg(f) = 2$. On résout le système donné par l'équation $\lambda_1(-2,1) + \lambda_2(1,-2) + \lambda_3(1,1) = (0,0)$ afin de trouver les relations de dépendance linéaire entre vecteurs :

$$\begin{cases} -2\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 - 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

C'est le même système qu'en (1) et donc $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$. En prenant $\lambda_1 = 1$, on obtient $(1,1) = -(-2,1) - (1,-2)$ et donc $Im(f) = Vect\{(-2,1),(1,-2),(1,1)\} = Vect\{(-2,1),(1,-2)\}$. Or la famille {(-2,1),(1,-2)} est libre car les deux vecteurs sont non-collinéaires, il s'agit donc d'une base de $Im(f)$.

Exercice 8

Solution :

1. $\mathrm{im}(f) \equiv f(\mathbb{R}^4) = \mathbb{R}$ car, par exemple, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x,0,0,0) = x$.

2. Selon le théorème du rang, $\dim(\ker(f)) = 4 - \mathrm{rg}(f) = 3$ car, selon l'observation ci-dessus, $\mathrm{rg}(f) \equiv \dim(\mathrm{im}(f)) = 1$. Pour une base $\mathcal{B}'$ de $\ker(f)$ il nous faut alors trois vecteurs b_1, b_2, b_3 linéarement indépendents qui satisfaisont $f(b_i) = 0$, $i = 1,2,3$. Remarqons, que selon l'énnoncé, $f(e_a) = 1$ pour chaque $a \in \{1,2,3,4\}$. Alors, un choix possible est $\mathcal{B}' = (e_1 - e_4, e_2 - e_4, e_3 - e_4)$.

Exercice 10 Solution :

1. $\forall\ u := (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $v := (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, des suites a valeurs dans un corps $\mathbb{K}$, et $\forall\lambda\in\mathbb{K}$, nous avons pour tout $n\in\mathbb{N}$

$$(f(u+\lambda v))_n = (u+\lambda v)_{n+2} - (u+\lambda v)_{n+1} - 2(u+\lambda v)_n = u_{n+2} + \lambda v_{n+2} - u_{n+1} - \lambda v_{n+1} - 2u_n - 2\lambda v_n$$

et alors

$$(f(u+\lambda v))_n = u_{n+2} - u_{n+1} - 2u_n + \lambda\left(v_{n+2} - v_{n+1} - 2v_n\right) = (f(u))_n + \lambda\left(f(v)\right)_n$$

d'où $f(u+\lambda v) = f(u) + \lambda f(v)$.

2. $f(u) = 0$ implique pour tout $n\in\mathbb{N}$: $(f(u))_n = u_{n+2} - u_{n+1} - 2u_n = 0$. **Exercice 11**

Solution :

1. $f\colon C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})\to C^0(\mathbb{R},\mathbb{R}), y\mapsto y+y'$. $\forall y_1, y_2\in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et $\forall\lambda\in\mathbb{R}$:

$$f(y_1+\lambda y_2) \equiv y_1 + \lambda y_2 + (y_1+\lambda y_2)' = y_1 + \lambda y_2 + y_1' + \lambda y_2'.$$

Alors

$$f(y_1+\lambda y_2) = y_1 + y_1' + \lambda\left(y_2 + y_2'\right) \equiv f(y_1) + \lambda f(y_2).$$

2. Déterminons $\ker(f) = \{y\in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R}) | y + y' = 0\}$. Alors, pour toute $y\in\ker(f)$ on a :

$$y(x) + y'(x) = 0 \quad , \qquad \forall x\in\mathbb{R}. \tag{1}$$

Une solution évidente est $y = 0$, c'est-à-dire, $y(x) = 0\ \forall x\in\mathbb{R}$. (En fait, le noyau $\ker(f)$ d'une application f linéaire est toujours un éspace vectoriel et alors forcement $0\in\ker(f)$). Supposons maintenant $y\in\ker(f)\backslash\{0\}$. Ainsi il existe un $x_0\in\mathbb{R}$ tel que $y(x_0)\neq 0$. Par la continuité de y, on a $y(x)\neq 0$ pour tout $x\in I_{x_0}$ où I_{x_0} est un intervalle contenant x_0. Alors pour $x\in I_{x_0}$ la fonction $x\mapsto\ln(|y(x)|)$ est bien défini et selon Éq. (1) on a pour sa dériveé

$$(\ln(|y(x)|))' = \frac{y'(x)}{y(x)} = -1.$$

Intégration nous amene à

$$\ln(|y(x)|) = -x + C \qquad \Leftrightarrow \qquad |y(x)| = c\cdot\exp(-x) \tag{2}$$

pour un $C\in\mathbb{R}$ et un $c = \exp(C)\in\mathbb{R}_+^*$. Maintenant on voit que, dans notre cas, $y(x_0)\neq 0$ pour un seul $x_0\in\mathbb{R}$ implique que $y(x)\neq 0$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

(Remarque : C'est une consequence de notre choix de f. Si l'on cherche, par exemple, le noyeau de $g\colon C^2(\mathbb{R},\mathbb{R})\to C^0(\mathbb{R},\mathbb{R}), y\mapsto y+y''$ on a $\sin\in\ker(g)$ qui n'a évidemment pas cette propriété. En fait, similairement au resultat d'exercice présent, on a, sans preuve : $\ker(g) = \mathrm{Vect}(\sin,\cos)$.)

$y\in\ker(f)$ est équivalent à la validité de l'Éq. (1). On vient de montrer que si, en plus, $y\neq 0$, alors forcement

$$y(x) = \lambda\cdot e^{-x} \quad , \qquad \forall x\in\mathbb{R},$$

pour un $\lambda\in\mathbb{R}$, cf. (2). On voit aussi facilement que tout y de cette forme est une solution d'Éq. (1) pour chaque $\lambda\in\mathbb{R}$. Alors on a trouvé

$$\ker(f) = \{\lambda(e^{-x})_{x\in\mathbb{R}}, \lambda\in\mathbb{R}\} \equiv \{\lambda\left(\exp\circ(-\mathrm{id})\right), \lambda\in\mathbb{R}\}.$$

3. $\ker(f) = \mathrm{Vect}\left((e^{-x})_{x\in\mathbb{R}}\right)$. Alors l'application $x\mapsto\exp(-x)$ est une base de ce sous-espace vectoriel de $C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ de dimension 1.

Remarque : Le sous-espace $\mathrm{im}(f)\equiv f\left(C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})\right)\subset C^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ n'est pas un espace vectoriel de dimension finie.

Exercice 12. On considère l'application linéaire $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ définie par

$$f(x,y,z) = (6x-4y-4z, 5x-3y-4z, x-y).$$

1. On rappelle que $\mathrm{Ker}(f) = \{u\in\mathbb{R}^3 \text{ t.q. } f(u) = 0_{\mathbb{R}^3}\}$ donc

$$u=(x,y,z)\in\mathrm{Ker}(f)\Leftrightarrow f(u)=(0,0,0)\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{ccccccc} 6x & - & 4y & - & 4z & = & 0\\ 5x & - & 3y & - & 4z & = & 0\\ x & - & y & & & = & 0\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{ccccccc} 6x & - & 4x & - & 4z & = & 0\\ 5x & - & 3x & - & 4z & = & 0\\ & & & & x & = & y\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{ccccc} 2x & - & 4z & = & 0\\ & & x = & & y\end{array}\right.$$

d'où on obtient finalement la condition $x = y = 2z$. Par conséquent, $u = z(2,2,1)$ et le vecteur $a = (2,2,1)$ est donc tel que $\text{Ker}(f) = \text{Vect}(a)$.

2a. Soit $b = e_1 + e_2 = (1,1,0)$ et $c = e_2 - e_3 = (0,1,-1)$. Par conséquent, on a

$$f(b) = (6\times 1 - 4\times 1 - 4\times 0, 5\times 1 - 3\times 1 - 4\times 0, 1-1) = (2,2,0),$$

$$f(c) = (6\times 0 - 4\times 1 - 4\times(-1), 5\times 0 - 3\times 1 - 4\times(-1), 0-1) = (0,1,-1).$$

2b. On remarque d'après la question précédente que $f(b) = 2b$ (donc $b = f(\frac{1}{2}b)$ puisque f est linéaire) et que $f(c) = c$. D'où b, $c \in \text{Im}(f)$ par définition. De plus, ces deux vecteurs forment une famille libre de $\text{Im}(f)$, car ils sont non colinéaires. D'où $\dim \text{Im}(f) \geq 2$. Mais on a vu à la question précédente que $\dim \text{Ker} f = 1$, ainsi d'après le théorème du rang:

$$\dim \text{Im}(f) + \dim \text{Ker}(f) = 3 \Rightarrow \dim \text{Im}(f) = 2,$$

et donc (b,c) est en fait une base de $\text{Im}(f)$.

3. On vient de montrer que $\text{Im}(f) = \text{Vect}\left((1,1,0),(0,1,-1)\right)$, donc un vecteur $u = (x,y,z)$ est dans $\text{Im}(f)$ si et seulement si il existe α et β dans $\mathbb{R}$ tels que

$$(x,y,z) = \alpha(1,1,0) + \beta(0,1,-1) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccccc} x & = & \alpha & & \\ y & = & \alpha & + & \beta \\ z & = & -\beta & & \end{array}\right.$$

En remplaçant respectivement x par α et z par $-\beta$ dans la deuxième équation, on obtient alors la condition $y = x - z$, d'où $\text{Im}(f) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \text{ t.q. } x - y - z = 0\}$.

4. Vérifions tout d'abord que $\text{Ker}(f) \cap \text{Im}(f) = \{0\}$. Supposons que (x,y,z) est dans $\text{Ker}(f) \cap \text{Im}(f)$. D'après la question **1**., on a vu que (x,y,z) est de la forme λa avec $a = (2,2,1)$, d'où $x = y = 2z$. Maintenant, regardons quand un tel vecteur $(2z,2z,z)$ est dans $\text{Im}(f)$. D'après la question précédente, $\text{Im}(f) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \text{ t.q. } x - y - z = 0\}$. Or

$$2z - 2z - z = -z,$$

et ceci vaut 0 si et seulement si $z = 0$, autrement dit si $(x,y,z) = (2z,2z,z) = (0,0,0)$. Donc $\text{Ker}(f) \cap \text{Im}(f) = \{0\}$.

Maintenant, reste à montrer que $\text{Ker}(f) + \text{Im}(f) = \mathbb{R}^3$. Comme $\text{Ker}(f) + \text{Im}(f) \subseteq \mathbb{R}^3$, il suffit de montrer qu'ils ont même dimension. D'après la formule de Grassmann,

$$\dim(\text{Ker}(f) + \text{Im}(f)) = \dim \text{Ker}(f) + \dim \text{Im}(f) - \dim(\text{Ker}(f) \cap \text{Im}(f)) = 2 + 1 - 0 = 3 = \dim(\mathbb{R}^3).$$

Exercice 13. On note (e_1, e_2, e_3, e_4) la base canonique de $\mathbb{R}^4$ et (f_1, f_2, f_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On considère l'application linéaire $u : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ définie par

$$u(e_1) = f_1 - f_2 + 2f_3, u(e_2) = 2f_1 + f_2 - 3f_3, u(e_3) = 3f_1 - f_3, u(e_4) = -f_1 - 2f_2 + 5f_3.$$

1. Considérons le vecteur $(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$. Par définition, ce vecteur se décompose dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$ sous la forme

$$(x,y,z,t) = xe_1 + ye_2 + ze_3 + te_4.$$

Ainsi, par linéarité de l'application u, on en déduit que

$$u(x,y,z,t) = u(xe_1 + ye_2 + ze_3 + te_4) = xu(e_1) + yu(e_2) + zu(e_3) + tu(e_4),$$

or $u(e_1) = (1,-1,2)$, $u(e_2) = (2,1,-3)$, $u(e_3) = (3,0,-1)$ et $u(e_4) = (-1,-2,5)$. D'où

$$u(x,y,z,t) = (x + 2y + 3z - t, -x + y - 2t, 2x - 3y - z + 5t).$$

2. Par définition, $\mathrm{Ker}(u) = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \text{ t.q. } u(x,y,z,t) = 0\}$. D'où

$$(x,y,z,t) \in \mathrm{Ker}(f) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcl} x & + & 2y & + & 3z & - & t & = & 0 \\ -x & + & y & & & - & 2t & = & 0 \\ 2x & - & 3y & - & z & + & 5t & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\underset{L_1 \leftarrow L_2+L_1, L_3 \leftarrow L_3+2L_2}{\Leftrightarrow} \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcl} x & + & 2y & + & 3z & - & t & = & 0 \\ & & 3y & + & 3z & - & 3t & = & 0 \\ & - & y & - & z & + & t & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcl} x & + & 2y & + & 3z & - & t & = & 0 \\ & & y & + & z & - & t & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcl} x & + & y & + & 2z & & & = & 0 \\ & & y & + & z & - & t & = & 0 \end{array} \right.$$

On obtient donc les conditions $x = -y - 2z$ et $t = y + z$, ainsi

$$(x,y,z,t) = (-y-2z, y, z, y+z) = y(-1,1,0,1) + z(-2,0,1,1).$$

Donc la famille composée des 2 vecteurs $(-1,1,0,1)$ et $(-2,0,1,1)$ est une famille génératrice de $\mathrm{Ker}(u)$, et elle est libre puisque les 2 vecteurs sont non colinéaires. Ainsi, c'est une base de $\mathrm{Ker}(u)$, et $\dim \mathrm{Ker}(u) = 2$.

3. D'après le théorème du rang, on a

$$\dim \mathrm{Ker}(u) + \dim \mathrm{Im}(u) = \dim \mathbb{R}^4 = 4,$$

d'où on déduit d'après **2**. que $\dim \mathrm{Im}(u) = 2$. Il suffit donc de trouver 2 vecteurs dans $\mathrm{Im}(u)$ formant une famille libre, c'est à dire 2 vecteurs de $\mathrm{Im}(u)$ non colinéaires. En regardant les images des vecteurs de la base canonique, on remarque que $u(e_2)$ et $u(e_3)$ sont non colinéaires, donc ils forment une base de $\mathrm{Im}(u)$.

Exercice 18 :

Soit $u : E \to E$ une application linéaire et $E_\lambda = ker(u - \lambda Id) = \{x \in E | (u - \lambda Id)(x) = 0\}$

(1) Soit $x \in E_\lambda$, on a par définition :

$$(u - \lambda Id)(x) = 0$$
$$\Leftrightarrow u(x) - \lambda x = 0$$
$$\Leftrightarrow u(x) = \lambda x$$

Montrons que $E_\lambda = ker(u - \lambda Id)$ est un sous-espace vectoriel :
a) $u(0) = 0$ car u est une application linéaire et $\lambda 0 = 0$, donc $(u - \lambda Id)(0) = 0 \Leftrightarrow 0 \in ker(u - \lambda Id)$
b) Soient $x_1, x_2 \in E_\lambda$ (en particulier $(u - \lambda Id)(x_1) = (u - \lambda Id)(x_2) = 0$), et $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$

$$(u - \lambda Id)(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = u(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) - \lambda(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)$$
$$= u(\lambda_1 x_1) + u(\lambda_2 x_2) - \lambda\lambda_1 x_1 - \lambda\lambda_2 x_2$$
$$= \lambda_1 u(x_1) - \lambda_1 \lambda x_1 + \lambda_2 u(x_2) - \lambda_2 \lambda x_2$$
$$= \lambda_1(u(x_1) - \lambda x_1) + \lambda_2(u(x_2) - \lambda x_2) = \lambda_1(u - \lambda Id)(x_1) + \lambda_2(u - \lambda Id)(x_2)$$
$$= \lambda_1 0 + \lambda_2 0 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \in E_\lambda$$

(2) Soit $F \subset E$ un sous-espace vectoriel (sev) de E. Montrons que $u(F)$ est un sev.
a) $u(0) = 0$, or $0 \in F$ car F est un sev. Par conséquent, $0 \in u(F)$
b) Soient $u(x_1), u(x_2) \in F$ (avec donc $x_1, x_2 \in F$) et $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$,

$$\lambda_1 u(x_1) + \lambda_2 u(x_2) = u(\lambda_1 x_1) + u(\lambda_2 x_2) = u(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \in u(F)$$

On remarque en effet que u est linéaire et que $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \in F$ car F est un sev (stable par combinaison linéaire).

(3) Montrons que $u(E_\lambda) = E_\lambda$ avec $\lambda \neq 0$ (on montre les deux inclusions). Soit $x \in E_\lambda$, on a par la question (1), $u(x) = \lambda x$. D'une part, par (1) E_λ est un sev donc en particulier stable par multiplication scalaire, par conséquent $u(x) \in E_\lambda$.

D'autre part, $x = \frac{1}{\lambda} u(x)$ et donc puisque $u(E_\lambda)$ est un sev par (2) et en particulier stable par multiplication scalaire, $x \in u(E_\lambda)$.