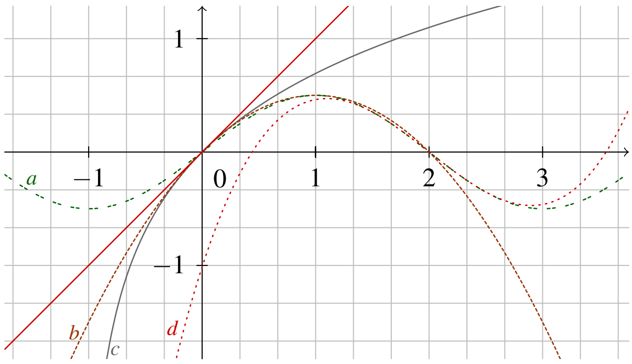
Université Claude Bernard Lyon 1
Semestre de printemps 2017–2018

UE Fondamentaux des Mathématiques II

Feuille 6 : Formules de Taylor

On peut s'aider de `http://bit.ly/wimsFonctions` et `http://bit.ly/PolynomeDeTaylor`.

Exercice 6.1 Dans les graphes des fonctions suivantes, identifier $x \mapsto \frac{1}{2}\sin\frac{\pi x}{2}$, $x \mapsto \ln(1+x)$ et la partie polynomiale de leurs développements limités à des points et des ordres qu'on déterminera.



Exercice 6.2 Écrire la formule de Taylor avec reste intégral pour l'application exponentielle en 0 à l'ordre $n \geq 1$. En déduire que

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} < e < \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{1}{n!}$$

puis que e est irrationnel. En donner une approximation à 10^{-4} près.

Exercice 6.3 Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$ vérifiant $f(0) = f'(0) = f'(1) = 0$ et $f(1) = 1$. Dessiner la situation et montrer que f'' n'est pas majorée par 4.

Exercice 6.4 Appliquer l'inégalité de Taylor-Lagrange à cos entre 0 et x à l'ordre 4 et en déduire une valeur approchée de $c = \cos\frac{\pi}{32}$ à 10^{-5} près. En utilisant la formule de doublement du cosinus, $\cos(2\theta) = 2\cos^2\theta - 1$, en trouver la valeur exacte.

En approchant cos par $x \mapsto 1 - \frac{x^2}{2}$, quelle majoration de l'erreur pouvez-vous donner sur l'intervalle $[0,x]$? Et si on l'approche par le terme suivant non nul ?

Exercice 6.5 Soit $f :]-1,+\infty[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \ln(1+x)$.

(a) Calculer les dérivées successives de f jusqu'à l'ordre 4.

(b) À l'aide du théorème de Lagrange à l'ordre $n = 2$, prouver les inégalités suivantes :

$$x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \quad (x > 0).$$

(c) En déduire une valeur approchée de $\ln(1,003)$ à 10^{-8} près.

(d) Prouver l'encadrement de $\ln 2$ suivant (il faudra prendre $n > 2$) : $\frac{7}{12} \leq \ln 2 \leq \frac{157}{192}$.

Exercice 6.6 Écrire la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 4 pour les fonctions suivantes :

1. $x \mapsto 1+x+x^2+x^3$ au voisinage de 1.
2. $x \mapsto \cos(x)$ au voisinage de 0. En déduire que $\forall x > 0, 1-\frac{x^2}{2} < \cos x < 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}$. Que se passe-t-il pour $x < 0$?
3. $x \mapsto \exp(-x)$ au voisinage de 0. En déduire que $\forall x > 0, 1-x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6} < \exp(-x) < 1-x+\frac{x^2}{2}$. Que se passe-t-il pour $x < 0$?

Exercice 6.7 Démontrer que pour tout $x \geq 0$ on a

$$1-\frac{x}{3}+\frac{2x^2}{9}-\frac{14x^3}{81} \;\leq\; \frac{1}{\sqrt[3]{1+x}} \;\leq\; 1-\frac{x}{3}+\frac{2x^2}{9}.$$

En déduire une valeur de $(30)^{-1/3}$ à 10^{-4} près. [Indication : penser à 27]

Exercice 6.8 Utiliser la formule de Taylor-Lagrange avec un reste à l'ordre deux pour montrer que $\dfrac{1}{\sqrt{101}}$ vaut $\dfrac{1}{10}-\dfrac{1}{2000}=0,0995$, à la tolérance 5×10^{-6} près.

Exercice 6.9 Soit $f(x)=e^{-\frac{1}{x^2}}$ définie sur $\mathbb{R}^*$. Nous allons montrer que f est prolongeable par continuité en une fonction infiniment dérivable sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer
$$\forall n \in \mathbb{N},\ \exists ! P_n \in \mathbb{R}[X],\ f^{(n)}(x)=P_n\left(\frac{1}{x}\right)f(x).$$
Calculer les premiers termes de cette suite.
2. Montrer, que pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$, $P\left(\frac{1}{x}\right)f(x)$ a une limite quand x tend vers 0.
3. Appliquer le théorème de Lagrange à la fonction f sur l'intervalle $[0,x]$ et en ébaucher le graphe.

Exercice 6.10 Soit $f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R})$ à valeurs positives. On s'intéresse à la régularité de $g=\sqrt{f}$.

1. Quelle est la régularité de g en un point où f ne s'annule pas ?
2. Estimer les deux premières dérivées de f en un point où elle s'annule.
3. Soit $a \in \mathbb{R}$ tel que $f(a)=0$. Y faire un développement limité de f et en déduire que g y est dérivable ssi $f''(a)=0$.

Exercice 6.11 Inégalité de Kolmogorov Étudier la fonction $u \mapsto \frac{2M_0}{u}+\frac{uM_2}{2}$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ pour M_0, M_2 deux constantes positives.

Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable avec $|f| < M_0$ et $|f''| < M_2$. Montrer qu'alors $|f'| < M_1 = 2\sqrt{M_0M_2}$. (Indication : écrire la formule de Taylor-Lagrange entre x et $x+u$.)