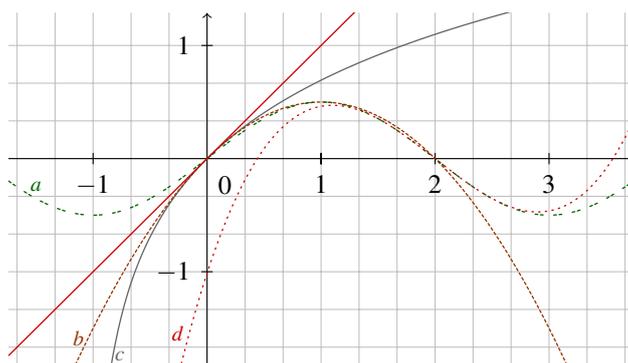


## Feuille 6 : Formules de Taylor

On peut s'aider de <http://bit.ly/wimsFonctions> et <http://bit.ly/PolynomeDeTaylor>.



**Exercice 6.1** Dans les graphes des fonctions suivantes, identifier  $x \mapsto \frac{1}{2} \sin \frac{\pi x}{2}$ ,  $x \mapsto \ln(1+x)$  et la partie polynomiale de leurs développements limités à des points et des ordres qu'on déterminera.



**Exercice 6.2** Écrire la formule de Taylor avec reste intégral pour l'application exponentielle en 0 à l'ordre  $n$ . En déduire que

$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \leq e \leq \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} + \frac{1}{n!}$$

puis que  $e$  est irrationnel. En donner une approximation à  $10^{-4}$  près.

**Exercice 6.3** Soit  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^2$  vérifiant  $f(0) = f'(0) = f'(1) = 0$  et  $f(1) = 1$ . Dessiner la situation et montrer que  $f''$  n'est pas majorée par 4.

**Exercice 6.4** Appliquer l'inégalité de Taylor-Lagrange à  $\cos$  entre 0 et  $x$  et en déduire une valeur approchée de  $c = \cos \frac{\pi}{32}$  à  $10^{-5}$  près. En utilisant la formule de doublement du cosinus,  $\cos(2\theta) = 2\cos^2 \theta - 1$ , en trouver la valeur exacte.

En approchant  $\cos$  par  $x \mapsto 1 - \frac{x^2}{2}$ , quelle majoration de l'erreur pouvez-vous donner sur l'intervalle considéré? Et si on l'approche par le terme suivant non nul?



**Exercice 6.5** 1. Écrire la formule de Taylor-Lagrange pour  $\ln$  au voisinage de 1 à l'ordre deux.

2. En déduire que  $\forall x > 0, x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x$ .

3. Montrer que  $\forall x > 0, \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \exp(x)$ .

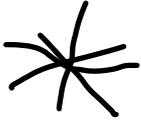
4. Montrer que la fonction  $x \mapsto (1+x)^{\frac{1}{x}}$  est prolongeable par continuité à  $] -1, +\infty[$ . En donner un développement limité à l'ordre 2 en 0.



**Exercice 6.6** Écrire la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 4 pour les fonctions suivantes :

1.  $x \mapsto 1 + x + x^2 + x^3$  au voisinage de 1.

2.  $\cos$  au voisinage de 0. En déduire que  $\forall x > 0, 1 - \frac{x^2}{2} < \cos x < 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$ . Que se passe-t-il pour  $x < 0$ ?
3.  $x \mapsto \exp(-x)$  au voisinage de 0. En déduire que  $\forall x > 0, 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} < \exp(-x) < 1 - x + \frac{x^2}{2}$ . Que se passe-t-il pour  $x < 0$ ?



**Exercice 6.7** Soit  $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$  définie sur  $\mathbb{R}^*$ . Nous allons montrer que  $f$  est prolongeable par continuité en une fonction infiniment dérivable sur  $\mathbb{R}$ .

1. Montrer

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists ! P_n \in \mathbb{R}[X], f^{(n)}(x) = P_n \left( \frac{1}{x} \right) f(x).$$

Calculer les premiers termes de cette suite.

2. Montrer, que pour tout polynôme  $P \in \mathbb{R}[X]$ ,  $P \left( \frac{1}{x} \right) f(x)$  a une limite quand  $x$  tend vers 0.
3. Appliquer le théorème de Lagrange à la fonction  $f$  sur l'intervalle  $[0, x]$  et en ébaucher le graphe.

**Exercice 6.8** Soit  $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$  à valeurs positives. On s'intéresse à la régularité de  $g = \sqrt{f}$ .

1. Quelle est la régularité de  $g$  en un point où  $f$  ne s'annule pas?
2. Estimer les deux premières dérivées de  $f$  en un point où elle s'annule.
3. Soit  $a \in \mathbb{R}$  tel que  $f(a) = 0$ . Y faire un développement limité de  $f$  et en déduire que  $g$  y est dérivable ssi  $f''(a) = 0$ .

**Exercice 6.9 Inégalité de Kolmogorov** Étudier la fonction  $u \mapsto \frac{2M_0}{u} + \frac{uM_2}{2}$  sur  $\mathbb{R}^{+*}$  pour  $M_0, M_2$  deux constantes positives.

Soit  $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction deux fois dérivable avec  $|f| < M_0$  et  $|f''| < M_2$ . Montrer qu'alors  $|f'| < M_1 = 2\sqrt{M_0M_2}$ . (Indication : écrire la formule de Taylor-Lagrange entre  $x$  et  $x + u$ .)