Université Claude Bernard Lyon 1 UE Fondamentaux des Mathématiques II
Semestre de printemps 2019-2020

Feuille 8 : Intégrales de Riemann

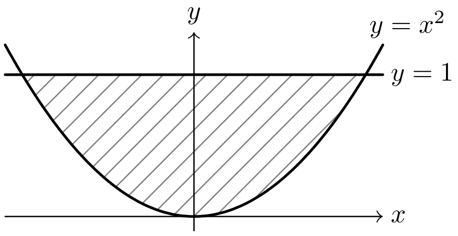
1 Calcul d'aires

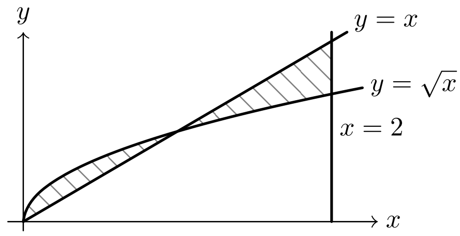
Exercice 1. Considérons

$$\begin{aligned} f : [-1, 1] &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \sqrt{1 - x^2}. \end{aligned}$$

1. Dessiner le graphe de f.
2. Soit $x \in [-1, 1]$. Montrer que si l'on pose $\theta = \arccos(x)$, alors $(x, f(x)) = (\cos\theta, \sin\theta)$.
3. En déduire $\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Exercice 2. Déterminer l'aire des domaine hachurés représentés ci-dessous.

1.


2.


Exercice 3. Déterminer sans aucun calcul la valeur de l'intégrale

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(x)\sqrt{3 + x^2}\,\mathrm{d}x.$$

On pourra s'aider d'un dessin.

Exercice 4. On considère la fonction

$$\begin{aligned} f : [0, 1] &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x. \end{aligned}$$

1. Sans faire de calcul, et grâce à des considérations géométriques, montrer que
$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 1/2.$$
2. On se propose de retrouver ce résultat en faisant appel à la définition de l'intégrale de Riemann.

(a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définit les fonctions en escalier u_n et v_n sur $[0,1]$ par

$$\forall k \in \{0,\dots,n-1\},\ \forall x \in \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right[, \quad u_n(x) = f\left(\frac{k}{n}\right) \text{ et } v_n(x) = f\left(\frac{k+1}{n}\right),$$

et $u_n(1) = v_n(1) = 1$. Faire un dessin des fonctions f, u_n et v_n. Montrer que, par définition de l'intégrale de Riemann,

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n} \leqslant \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k+1}{n}.$$

(b) En faisant tendre n vers $+\infty$, en conclure que $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 1/2$

3. Finalement, retrouver le résultat encore une fois en faisant appel au théorème fondamental de l'analyse.
4. Répéter les questions 2. et 3. avec, à la place de la fonction f, la fonction

$$g : x \mapsto x^2.$$

2 Sommes de Riemann

On rappelle le résultat suivant (dont on verra une preuve pour les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ dans l'exercice 12) : si $f : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ est une fonction intégrable au sens de Riemann, alors

$$\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Exercice 5. En utilisant ce résultat, calculer la limite des suites suivantes :

1. $u_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+k/n}$, 2. $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{k}{n^3}}$, 3. $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{k^2+n^2}$.

Exercice 6. Déterminer la limite de la suite suivante :

$$u_n = \sqrt[n]{\frac{(2n)!}{n!n^n}}.$$

Indication : on pourra étudier la suite $(\ln(u_n))$.

Exercice 7. On cherche à déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par

$$u_n = \sum_{k=1}^{n}\sin\left(\frac{k}{n^2}\right)\sin\left(\frac{k}{n}\right).$$

1. Commençons par étudier la suite

$$v_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}\sin\left(\frac{k}{n}\right).$$

Montrer que la suite (v_n) converge vers une limite à préciser. On pourra utiliser le fait que $x \mapsto \sin(x) - x\cos(x)$ est une primitive de $x \mapsto x\sin(x)$.

2. Montrer que l'inégalité $x - x^3/6 \leqslant \sin(x) \leqslant x$ est vérifiée pour tout $x \geqslant 0$.
3. En déduire que pour tout $n \geqslant 1$,

$$|u_n - v_n| \leqslant \frac{1}{6n^2}.$$

4. Conclure : établir que $\lim_{n\to+\infty} u_n = \sin(1) - \cos(1)$.

3 Applications

Exercice 8 (Comparaison série-intégrale)**.** On se propose d'étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, définie par $u_n = \sum_{k=1}^{n} 1/k$.

1. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer que
$$\frac{1}{k+1} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{k},$$
par exemple avec un dessin, en graphant la fonction $x \mapsto 1/x$.
2. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$\int_1^{n+1} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \leqslant u_n \leqslant 1 + \int_1^{n} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x.$$
3. Que peut-on en conclure sur $\lim_{n\to+\infty} u_n$?

Exercice 9. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}_+$ une fonction continue telle que $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = 0$. Montrer que pour tout $x \in [a,b]$, $f(x) = 0$.

Exercice 10. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que
$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 x^n f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

4 Un peu de théorie

Exercice 11 (Une fonction non intégrable)**.** Soit $f : [0,1] \mapsto \mathbb{R}$ la fonction définie par
$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}. \end{cases}$$

1. Soit g une fonction en escalier telle que $g \geqslant f$. Montrer que pour tout $x \in [0,1]$, $g(x) \geqslant 1$ (sauf éventuellement en ses points de discontinuité).
2. De la même manière, montrer que si h est une fonction en escalier $\leqslant f$, alors $h \leqslant 0$ (sauf éventuellement en ses points de discontinuité).
3. En déduire que
$$\inf\left\{\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x,\ g \text{ en escalier et } g \geqslant f\right\} = 1,$$
$$\sup\left\{\int_0^1 h(x)\,\mathrm{d}x,\ h \text{ en escalier et } h \leqslant f\right\} = 0.$$
4. Conclure.

Exercice 12 (Calcul d'erreur)**.** Soit $f : [0,1] \mapsto \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. Elle est continue, donc intégrable au sens de Riemann. On pose $S = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$, et pour $n \geqslant 1$,
$$S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right).$$

1. Montrer que
$$|S - S_n| \leqslant \sum_{k=1}^{n} \int_{(k-1)/n}^{k/n} \left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| \mathrm{d}x.$$
2. Si $k \in \{1, \ldots, n\}$ et $x \in \left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right]$, montrer à l'aide de l'inégalité des accroissements finis que
$$\left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| \leqslant \frac{M}{n},$$
où M est une constante indépendante de k et de x.
3. En déduire que $|S - S_n| \leqslant \frac{M}{n}$.