Feuille d'exercices
Calculs de primitives

Exercice 1.

Calculer, sur un intervalle où le calcul est valable, les primitives des fonctions rationnelles suivantes (sauf indication expresse de l'énoncé, il n'est pas demandé d'expliciter l'intervalle sur lequel on calcule).

$$F_1(x)=\int\frac{x^2}{1+x^2}dx\,;F_2(x)=\int\frac{x}{x^2-3x+2}dx\,;F_3(x)=\int\frac{dx}{x(x-1)(x-2)}\,;F_4(x)=\int\frac{x^4}{x^3-3x+2}dx$$

$$F_5(x)=\int\frac{dx}{x^2+4}\,;F_6(x)=\int\frac{dx}{x^3-1}$$

Exercice 2.

Calculer les intégrales suivantes.

$$I_1=\int_0^1\frac{dx}{x^2+2};\quad I_2=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{1-x^2};\quad I_3=\int_2^3\frac{(2x+1)dx}{x^2+x-3};\ I_4=\int_0^2\frac{x}{x^4+16}dx\,;$$

$$I_5=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{dx}{\cos(x)\sin(x)};\ \ I_6=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^3(t)}{\sin^4(t)}dt\,;\ \ I_7=\int_0^1\frac{1+\mathrm{sh}(x)}{1+\mathrm{ch}(x)}dx$$

Exercice 3.

1. Calculer

$$G(t)=\int\frac{-t+1}{t^2+2t+5}dt$$

2. Calculer

$$F(t)=\int\frac{\ln(t^2+2t+5)}{(t-1)^2}dt$$

Exercice 4.

$$I=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^3(t)}{\sin^4(t)}dt$$

Exercice 5.

1. Déterminer une primitive de la fonction f définie par :

$$f(t)=\frac{1}{\sin(2t)}$$

2. A l'aide du changement de variable $x=2t$, calculer

$$F(x)=\int\frac{dx}{\sin(x)}$$

Exercice 6.

Calculer

$$F(t)=\int\frac{1}{1+\mathrm{ch}(t)}dt$$

Exercice 7.

1. Calculer pour $x > 0$

$$F(x) = \int \frac{\mathrm{ch}(x) - \mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x) - 1} dx$$

2. Calculer

$$\int \frac{2 - \mathrm{ch}(x) + \mathrm{sh}(x)}{2\,\mathrm{ch}(x)} dx$$

Exercice 8.

A l'aide d'une intégration par partie calculer les intégrales suivantes

a.

$$I_1 = \int_1^e t\ln(t)\,dt$$

b.

$$I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t\sin(t)\,dt$$

c.

$$I_3 = \int_0^{\sqrt{3}} 3x^2\ln(x^2+1)\,dx$$

Exercice 9.

1. Calculer

$$F(x) = \int \frac{dx}{x^2(x-1)}$$

2. Calculer

$$G(t) = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t(t+1)\left(\sqrt{\frac{t}{t+1}} - \frac{t}{t+1}\right)}$$

A l'aide du changement de variable $x = \sqrt{\frac{t}{t+1}}$

Exercice 10.

1.

$$F_1(x) = \int_0^x (t^2+1)\arctan(t)\,dt$$

2.

$$F_2(x) = \int_0^x (t+1)\arcsin(t)\,dt$$

Exercice 11.

$$F_1(x) = \int \sin^2(x)\,dx\,; F_2(x) = \int \arctan(x)\,dx\,;\ F_3(x) = \int \ln(x^2+2)\,dx; F_4(x) = \int x\sqrt{1+x}dx$$

$$F_5(x) = \int \sqrt{1-x^2}dx\,; F_6(x) = \int \frac{dx}{\cos^2(x)\sin^2(x)};\ F_7(x) = \int \frac{\cos^3(x)}{\sin^5(x)}dx\,;\ F_8(x) = \int \frac{\sin^3(x)}{1+\cos(x)}dx$$

Exercice 12.

Pour $n \geq 0$, un entier, soit $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)\,dx$

1. Calculer I_0 et I_1.
2. Montrer que pour tout $n \geq 0$

$$I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$$

3. Montrer que pour un nombre pair $n = 2k,\, k \geq 1$

$$I_{2k} = \frac{1 \times 3 \times \ldots \times (2k-1)}{2 \times 4 \times \ldots \times 2k} \times \frac{\pi}{2} \qquad (1)$$

Et que pour un nombre impair $n = 2k + 1$

$$I_{2k+1} = \frac{2 \times 4 \times \ldots \times (2k)}{3 \times 5 \times \ldots \times (2k+1)} \qquad (2)$$

4. Montrer que I_n est une suite décroissante.
5. Montrer que quand $k \to +\infty$

$$\frac{2}{1} \times \frac{2}{3} \times \frac{4}{3} \times \frac{4}{5} \times \frac{6}{5} \times \frac{6}{7} \times \ldots \times \frac{2k}{2k-1} \times \frac{2k}{2k+1} \to \frac{\pi}{2}$$

C'est la formule de Wallis.