Feuille
Espaces vectoriels

1.

Etudier la dépendance linéaire des vecteurs de $\mathbb{R}^2$ suivants :

1. $u = (2, -3)$, $v = (-1,1)$.
2. $u = (-6,2)$, $v = (9, -3)$.
3. $u = (m+1, -1)$, $v = (-3, m-1)$ où $m \in \mathbb{R}$.

2. *

Les familles de $\mathbb{R}^3$ suivantes sont-elles libres ou liées ?

1. $u = (1,1,1)$, $v = (1,1,-1)$.
2. $u = (1,0,-1)$, $v = (-1,1,0)$, $w = (0,-1,1)$.
3. $u = (1,1,0)$, $v = (0,1,1)$, $w = (1,0,1)$, $z = (-1,1,1)$.
4. $u = (1,1,1)$, $v = (2,-1,2)$, $w = (1,-2,1)$.
5. $u = (10,-5,15)$, $v = (-4,2,-6)$.

Les familles données ci-dessus sont-elles génératrices de $\mathbb{R}^3$? Lorsque que la réponse est négative on déterminera le sous-espace engendré et sa nature géométrique.

3.

On considère les sous-ensembles de $\mathbb{R}^3$ suivants :

$$F_1 = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ y = z = 0 \right\}$$
$$F_2 = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x + y = 0 \right\}$$
$$F_3 = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x + z = y \right\}$$
$$F_4 = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x = y \right\}$$

1. Vérifier que ce sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$; donner une base et la dimension de chacun d'eux.
2. Déterminer $F_2 + F_3$
3. Déterminer $F_2 \cap F_3$ et sa dimension. Que peut-on en déduire pour F_2 et F_3 ?
4. Montrer que F_1 et F_2 sont supplémentaires.
5. Montrer que F_1 et F_4 sont supplémentaires.
6. Quelle remarque peut-on faire en considérant les questions 4. et 5. ?
7. Indiquer la nature géométrique de chaque F_i.

4. *

On considère les sous-ensembles de $\mathbb{R}^4$ suivants :

$$F = \left\{ \left(x, y, z, t\right) \in \mathbb{R}^4,\ x + y + z + t = 0 \right\}$$
$$G = \left\{ \left(x, y, z, t\right) \in \mathbb{R}^4,\ x + y = z + t \right\}$$
$$H = \left\{ \left(a, b, c, d\right) \in \mathbb{R}^4,\ a = b = c = d \right\}$$

1. Vérifier que ce sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$, donner une base et la dimension de chacun d'eux.
2. Déterminer l'intersection de F et G, donner en particulier une base et la dimension de cette intersection.
3. Déterminer également l'union de F et G. Montrer que cela n'est pas un espace vectoriel.
4. Quelle est la dimension de $F + G$? Sont les deux espaces supplémentaires ?
5. Montrer que $\mathbb{R}^4 = F \oplus H$.

5.

Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par $u_1 = (2, -3, 1)$ et $u_2 = (2, -2, 1)$.

1. Quelle est la dimension de F ?
2. Démontrer que le vecteurs $u = (0, 1, 0)$ est élément de F, mais que $v = (0, 0, 1)$ ne l'est pas.
3. Calculer les composantes du vecteurs $w = (0, 4, 0) \in F$ dans la base $\left(u_1, u_2\right)$.
4. Exprimer qu'un vecteur $v = \left(x, y, z\right)$ appartient à F par une équation en x, y, z.
5. Indiquer la nature géométrique de F.

6.

Soit $E = \left\{ \left(x, y, z, t\right) \in \mathbb{R}^4,\ x + y = 0 \text{ et } z = 2t \right\}$

Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ et déterminer une base de E. Compléter cette base en une base de $\mathbb{R}^4$.

7. *

Soit $E = \{P \in \mathbb{R}_2[X],\ P(1) = 0\}$

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Donner une base de E et en déduire sa dimension.

8.

Soient $f(x) = \cos(x)$, $g(x) = \cos(x)\cos(2x)$ et $h(x) = \sin(x)\sin(2x)$. Déterminer une base et la dimension de $Vect(f, g, h)$.

9.

Soit $\left(P_0, P_1, \ldots, P_n\right)$ une famille de polynômes tels que pour tout $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$, $d^\circ P_k = k$
Montrer que cette famille est libre.

Pourquoi les polynômes $1, X, X(X-1), X(X-1)(X-2)$ forment-ils une base de l'espace vectoriel $\mathbb{R}_3[X]$ des polynômes à coefficients réels de degré au plus 3 ?
Exprimer X^2 et X^3 dans cette base.

10.

Soit $E = \left\{ P \in \mathbb{R}_2[X] \,\middle|\, P = \lambda + (2\lambda - 3\mu)X + \mu X^2, \lambda \in \mathbb{R}, \mu \in \mathbb{R} \right\}$.

Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_2[X]$ (espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré ≤ 2) et en donner une base.

11. *

Dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathscr{C}^\infty\left(\left[a,b\right],\mathbb{R}\right)$ des applications de classe $\mathscr{C}^\infty$ de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$, montrer que les familles suivantes sont libres :

a) $\{x, e^x\}$ b) $\{e^x, e^{2x}\}$ c) $\{x, \sin(x)\}$ d) $\{\cos(x), \sin(x)\}$

12. *

Soit E l'espace vectoriel des suites de nombres réels et $\mathscr{E} \subset E$ l'ensemble des suites $(u_n)_{n\geq 0}$ vérifiant la relation de récurrence :

$$u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n \qquad (n \geq 0)$$

1. Montrer que $\mathscr{E}$ est un sous-espace vectoriel de E.
2. Montrer que les suites de terme général $a_n = (-1)^n$ et $b_n = 2^n$ forment une famille libre de $\mathscr{E}$.
3. Tenant compte du fait qu'une suite (u_n) est entièrement déterminée par la donnée de u_0 et u_1, montrer que (a_n) et (b_n) forment une base de $\mathscr{E}$.
4. Déterminer les suites (u_n) de $\mathscr{E}$ telles que $u_0 = 1$ et $u_1 = -2$.

13. *

Soient a, b et c trois fonctions continues sur un intervalle I, avec $\forall x \in I,\ a(x) \neq 0$. On appelle E l'ensemble des solutions de l'équation différentielle

$$a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = 0$$

Montrer que E est un espace vectoriel.

14.

Soient $a = (2,3,-1)$, $b = (1,-1,-2)$, $c = (3,7,0)$ et $d = (5,0,-7)$.

Soient $E = Vect(a,b)$ et $F = Vect(c,d)$ les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$. Montrer que $E = F$

15.

Dans l'espace $\mathbb{R}^4$, on se donne cinq vecteurs : $v_1 = (1,1,1,1)$, $v_2 = (1,2,3,4)$, $v_3 = (3,1,4,2)$, $v_4 = (10,4,13,7)$ et $v_5 = (1,7,8,14)$

Chercher les relations de dépendance linéaires entre ces vecteurs. Si ces vecteurs sont dépendants, en extraire au moins une famille libre engendrant le même sous-espace.

16. Soient $P_0 = \dfrac{1}{2}(X-1)(X-2)$, $P_1 = -X(X-2)$ et $P_2 = \dfrac{1}{2}X(X-1)$ trois polynômes de $\mathbb{R}_2[X]$.

1. Montrer que (P_0, P_1, P_2) est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Soit $P = aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}_2[X]$, exprimer P dans la base (P_0, P_1, P_2).
3. Soit $Q = \alpha P_0 + \beta P_1 + \gamma P_2 \in \mathbb{R}_2[X]$, exprimer Q dans la base $(1, X, X^2)$.
4. Pour tout A, B et C réels montrer qu'il existe un unique polynôme de $R \in \mathbb{R}_2[X]$, tel que :

$R(0) = A$, $R(1) = B$ et $R(2) = C$.

17.

Soit $E = \left\{ P \in \mathbb{R}_3[X],\ P(-1) = 0 \quad \text{et} \quad P(1) = 0 \right\}$

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[X]$.
2. Déterminer une base et la dimension de E.

18. *

Soit $E = \left\{ \left(x, y, z, t\right) \in \mathbb{R}^4,\ x + y + z + t = 0, x + 2y - z + t = 0,\ -x - y + 2z + 2t = 0 \right\}$ et

$F = \left\{ \left(x, y, z, t\right) \in \mathbb{R}^4,\ x + 3y + 4t = 0 \right\}$

1. Donner une base de ces deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$.
2. A-t-on $E \oplus F = \mathbb{R}^4$?
3. Soit $a = (1,3,0,4) \in \mathbb{R}^4$ et on pose $G = Vect(a)$, a-t-on $G \oplus F = \mathbb{R}^4$?

19. Soit $E = \{ \left(x_1, x_2, x_3\right) \in \mathbb{R}^3,\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0\}$

Soit $a = (1,2,-3)$, et $F = Vect(a)$

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$, et déterminer une base de cet espace-vectoriel.
2. A-t-on $E \oplus F = \mathbb{R}^3$?

On justifiera la réponse.

20. *

Soit $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices à coefficient dans $\mathbb{R}$ à n lignes et n colonnes.

Soit $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices antisymétriques de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. C'est-à-dire les matrices qui vérifient .

Soit $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. C'est-à-dire les matrices qui vérifient .

1. Montrer que $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ et $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Pour toutes matrices $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, montrer que la somme d'une matrice et sa transposée est dans l'espace $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ et la difference dans $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$.
3. En déduire que $\mathscr{A}_n(\mathbb{R}) + \mathscr{S}_n(\mathbb{R}) = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
4. A-t-on $\mathscr{A}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathscr{S}_n(\mathbb{R}) = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$?
5. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, décomposer A en une somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.

Remarque : Les exercices marqués avec un étoile * sont a faire obligatoirement en TD.