Licence 3-ième année **7 janvier 2016**
2015–2016

Corrigé de l'examen d'algèbre V du 7/1/16

Questions de cours (5 points)

1. le produit semi-direct de deux groupes N, K : $N \rtimes_\phi K$ est l'ensemble $N \times K$ avec la loi : $(n,k).{}_\phi(n',k') := (n\phi(k)(n'), kk')$ où $\phi : K \to \mathrm{Aut}(N)$ est un morphisme de groupes.
2. Les sous-groupes finis de $O(2)$ sont isomorphes à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ou à D_n le groupe diédral d'ordre $2n$.
3. Un élément de $O(3)$ est soit une rotation autour d'un axe, d'angle $\theta \in \mathbb{R}$, soit la composée d'une réflexion orthogonale par rapport à un plan et d'une rotation d'axe perpendiculaire à ce plan.
4. Théorèmes de Sylow : si G est un groupe d'ordre $p^a m$ où p premier ne divise pas m, alors G admet au moins un sous-groupe d'ordre p^a (un $p-$Sylow). Les $p-$Sylow de G sont conjugués. Le nombre n_p de $p-$Sylow divise m et $= 1 \mod p$.

Problème 1 (10,5 points)

1. (a) $n_7 = 1 \mod 7$ et $n_7 | 33 \Rightarrow n_7 = 1, 11, 3$, ou $33 \Rightarrow n_7 = 1$. De même $n_{11} = 1 \mod 11$ et $n_{11}|21 \Rightarrow n_{11} = 1$.

   (b) Comme $n_{11} = 1$, $P \lhd G$. Soit Q un $3-$Sylow. Q agit sur P par conjugaison. On écrit une équation aux classes : $|P| = \sum_i |O_i|$. Chaque orbite est de cardinal $\frac{|Q|}{\mathrm{Stab}_i} = 3$ ou 1. C'est 1 si l'orbite est réduite à un point x_i tel que $\forall\, g \in Q$, $gx_ig^{-1} = x_i$. Donc $|P| = |P^Q| \mod 3$ où $P^Q = \{p \in P \mid \forall\, q \in Q,\, qp = pq\}$. Comme $|P^Q|$ divise 11 et $11 \neq 1 \mod 3$, $P^Q = P$ *i.e.* le sous-groupe des éléments qui commutent à tous les éléments de P contient Q. De même les éléments qui commutent à tous les éléments de P contient un $7-$Sylow et bien entendu P car P est cyclque. Donc Le sous-groupe des éléments qui commutent à tous les élents de P est d'ordre un multiple de $3, 7, 11$ c'est donc G.

   (c) Existence : soit Q un $7-$Sylow. Comme $P \lhd G$, PQ est un sous-groupe de G d'ordre 77 car $P \cap Q = 1$. Comme $Q \lhd G$, $PQ \lhd G$. Unicité : Soit H d'ordre 77. H contient un $11-$Sylow et un $7-$Sylow. Donc $H = PQ$. Soit $p \in P$ d'ordre 11, soit $q \in Q$ d'ordre 7. Comme $pq = qp$, pq est d'ordre 77 donc PQ est cyclique.

   (d) Soit R un $3-$Sylow. Alors PR est distingué et d'ordre 33. Soit p d'ordre 11 dans P soit $r \in R$ d'ordre 3. Comme $pr = rp$, pr est d'ordre 33.

2. (a) Les générateurs de $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ sont : $1, 2, 3, 4, 5, 6 \mod 7$ (car 7 est premier)

   (b) $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}) \simeq (\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})^\times \simeq \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ cyclique car 7 est premier

   (c) Soit $\varphi : \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \to \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})$, $k \mod 3 \mapsto (x \mapsto 2^k x)$.

   (d) Le groupe $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z} \rtimes_\varphi \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ est d'ordre 21 non commutatif car $(0,1).{}_\varphi(1,0).{}_\varphi(0,1)^{-1} = (\varphi(1)(1), 0) = (2, 0 \neq (1,0)$.

3. Le groupe $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z} \rtimes_\varphi \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$ est non commutatif d'ordre 231.

Problème 2 (4,5 points)

1. Les sous-groupes distingués de S_4 sont 1, $F_4 := \{1, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$, A_4 et S_4. Le seul qui contient un 4−cycle, c'est S_4.
2. Soient P_1 et P_2 deux sous-groupes d'ordre 8 de S_4. Si $P_1 \neq P_2$, $P_1 \cap P_2$ est d'ordre 4 (car contient un 4−cycle). Donc d'indice 2 dans P_1 donc distingué dans P_1 (de même dans P_2). Donc N le normalisateur de $P_1 \cap P_2$ dans S_4 contient $P_1 \cup P_2$. C'est donc un sous-groupe de $P_1 \cap P_2$ d'ordre un diviseur de 24 qui est un multiple de 8 et > 8. Donc $|N| = 24 \Rightarrow N = S_4 \Rightarrow P_1 \cap P_2 \lhd S_4 \Rightarrow P_1 \cap P_2 = S_4$ absurde !
3. Nombre de 4−cycles : un 4−cycle de S_4 s'écrit de manière unique $(1ijk)$ où ijk sont 3 entiers distincts parmi $\{2, 3, 4\}$. D'où $3.2.1 = 6$ 4−cycles dans S_4. Soit n_2 le nombre de sous-groupes d'ordre 8. Ils sont tous isomorphes car ce sont les 2−Sylow, qui sont tous sont conjugués. Soit k le nombre de 4−cycles dans un 2−Sylow. On a donc $n_2 k = 6$ (car un 4−cycle engendre un 2−groupe forcément contenu dans un 2−Sylow) et $k \geq 2$ car si c est un 4−cycle dans un sous-groupe P d'ordre 8, $c^{-1} \in P$. Donc $n_2 = 1$ et $k = 6$ absurde car si $n_2 = 1$, l'unique 2−Sylow contient un 4−cycle et est distingué dans S_4 donc c'est S_4 absurde ! Donc $n_2 = 3$ et $k = 2$.

Problème 3 (4 points)

1. Comme G/H est de cardinal n, l'action de G sur G/H induit un morphisme : $\varphi : G \to S_{G/H} \simeq S_n$, $g \mapsto (xH \mapsto gxH)$. Si $g \in \ker \varphi$, alors $gxH = xH$ pour tout $x \in G$. En particulier si $x = 1$ d'où $gH = H$ *i.e.* $g \in H$.
2. D'après le premier théorème d'isomorphisme de Nöther, $G/\ker \varphi \simeq \mathrm{Im}\varphi$. Donc $m = |G/\ker \varphi| \mid n!$.
3. Si $g \in G$, $g^m = (g \ker \varphi)^m = 1 \mod \ker \varphi$ car $|G/\ker \varphi| = m$. Donc $g^m \in \ker \varphi \leq H$.
4. Soit $g \in G$ il existe $x \in G$ tel que $x^m = g$. Donc $g = x^m \in H$ et $G = H$.