Corrigé du partiel d'algèbre V du 5 novembre 2015

Cours :

1. action de groupe : c'est la donnée d'une application $G \times X \to X$, $(g, x) \mapsto g.x)$ (G groupe, X ensemble) telle que $\forall x \in X$, $e.x = x$, $\forall g, g' \in G, \forall x \in X$, $g.(g'.x) = (gg').x$.
2. Formule des classes de l'action d'un groupe G sur un ensemble fini X : $|X| = \sum_i |G.x_i| = \sum_i [G : G_{x_i}]$ où $\{x_i \ : \ i\}$ est une famille de représentants des orbtes de G.
3. Premier théorème de Nöther : un morphisme de groupes $\phi : G \to G'$ induit un isomorphisme $\overline{\phi} : G/\ker\phi \to \mathrm{Im}(\phi)$, $g \bmod \ker\phi \mapsto \phi(g)$.
4. Théorème de Burnside : (G groupe fini qui agit sur X ensemble fini) : Nombre d'orbites $= \sum_{g\in G} |X^g|$ où $X^g = \{x \in X \ : \ g.x = x\}$.

Problème 1 L'ensemble $G := \{a \in \mathbb{R} \ : \ a > 0, a \neq 1\}$ forme un groupe pour $a * b := a^{\ln b}$. Si $a, b > 0, \neq 1$, alors $a^{\ln b}$ aussi. Associativité : $a * (b * c) = a^{\ln(b^{\ln c})} = a^{\ln b \ln c} = (a * b) * c$. Neutre : e. Inverse de a : $e^{\frac{1}{\ln a}}$.

Problème 2 :

1. si $\forall g$, $g^2 = 1$, alors $\forall g$, $g^{-1} = g$ et $gg' = (gg')^{-1} = g'^{-1}g^{-1} = g'g$.
2. Soit $1 \neq g \in G$. Alors g est d'ordre 2 donc $2||G|$.
3. $g^2 = 1 \Rightarrow (gH)^2 = 1 \bmod H$.
4. Récurrence sur $|G|$: soit $1 \neq g \in G$. Soit $H := \langle g\rangle$. On peut appliquer l'hypothèse de récurrence à G/H. Alors $|G| = |H||G/H| = 2.2^a$ pour un certain $a =$ une puissance de 2.

Problème 3 :

1. Deux orbites : $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^2 \setminus \{0\}$ et $\{{}^t(0, 0)\}$.
2. $G_{{}^t(0,0)} = \{\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & c \end{pmatrix} : b \in \mathbb{Z}/5\mathbb{Z},\ c \in (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^*\}$. Donc $|(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^2 \setminus \{0\}| = 5^2 - 1 = 24 = \frac{|G|}{|G_{{}^t(0,0)}|} = \frac{|G|}{5.4}$. Donc $|G| = 24.20 = 480$.
3. dét $\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & c \end{pmatrix} = c$ donc dét surjectif. D'après le théorème d'isomorphisme de Nöther, $|SL_2(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})| = \frac{|G|}{|(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^*}= 120$.
4. $|S_5| = 5! = 120$. (12) est d'ordre 2, (123) est d'ordre 3, (1234) est d'ordre 4, (12345) est d'ordre 5, (123)(45) est d'ordre 6. Soit $\sigma \in S_5$, alors $\sigma = c_1 ... c_r$, produit de cycles à supports disjoints (de longueurs

> 1. Si $r = 1$, σ est d'ordre $2, 3, 4$, ou 5. Si $r \geq 2$, alors $r = 2$ et les longueurs sont 2 et 3 ($\sum_i l(c_i) \leq 5$) ou 2 et 2 donc l'ordre est 6 ou 2. En particulier, pas d'élément d'ordre 8 ou 10.

5. a est d'ordre 2, b d'ordre 5, $ab = ba$, 2 et 5 sont premiers entre eux donc ab d'ordre $2.5 = 10$.
6. $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}) \not\simeq S_5$ car l'un a un élément d'ordre 10 et l'autre non.

Problème 4

1. $\sigma(12)(34)\sigma^{-1} = (\sigma(1)\sigma(2))(\sigma(3)\sigma(4))$ est une double-transposition. De même pour les autres donc ${}^\forall\sigma \in S_4$, $\sigma F_4 \sigma^{-1} = F_4$.
2. a) d'après Cauchy, N contient un élément d'ordre 2 : s. Si s est une transposition comme $N \triangleleft S_4$, N contient toutes les transpositions. Or les transpositions engendrent S_4 donc $N = S_4$. Si s est une double transposition, comme $N \triangleleft S_4$, N les contient toutes donc $F_4 \leq N$.

   b) Si N contient F_4 et N d'ordre 4 alors $N = F_4$.
3. a) Si M est d'ordre 3, alors M est engendré par un $3-$cycle mais alors M n'est pas distingué dans S_4, absurde ! Sinon, M est d'ordre pair donc $M \geq F_4$ donc $|M|$ est divisible par 4 et 3 donc par 12. Comme $|M|$ divise $|S_4| = 24$, $|M| = 12$ ou 24. b) $g(M \cap A_4)g^{-1} = gMg^{-1} \cap A_4 = M \cap A_4$. Or $M/(M \cap A_4)$ est isomorphe à un sous-groupe de S_4/A_4. Donc $|M \cap A_4|$ est d'ordre $|M|$ ou $|M|/2$ donc reste d'ordre divisible par 3.

   c) Donc si $M \triangleleft S_4$ non trivial, alors $3||N| \Rightarrow M \cap A_4$ d'ordre 12 donc $M \cap A_4 = A_4 \Rightarrow A_4 \leq M \Rightarrow M = A_4$ ou S_4. Sinon, M est d'ordre qui divise 8. Donc $M \geq F_4$. Si $|M| = 4$, $M = F_4$, si $|M| > F_4$, M contient un $4-$cycle ou une transposition. Si M contient une transposition, M contient toutes les transpositions. Comme les transpositions engendrent S_4, $M = S_4$ absurde. Si M contient un $4-$cycle par exemple (1234), alors $(12)(34)(1234) = (13) \in M$ absurde !