# Fiche sur les coniques

## Exercice 1.

**1)** $2x^2-4xy-y^2-4x+10y-13=0.$

On prend $F(x,y)=2x^2-4xy-y^2-4x+10y-13.$

On résout $\partial_x F=\partial_y F=0$ :

On trouve : $\begin{cases} 4x-4y-4=0 \\ -4x-2y+10=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}.$

On fait le changement de variables :

$x=2+x'$ $y=1+y'.$

L'équation devient :

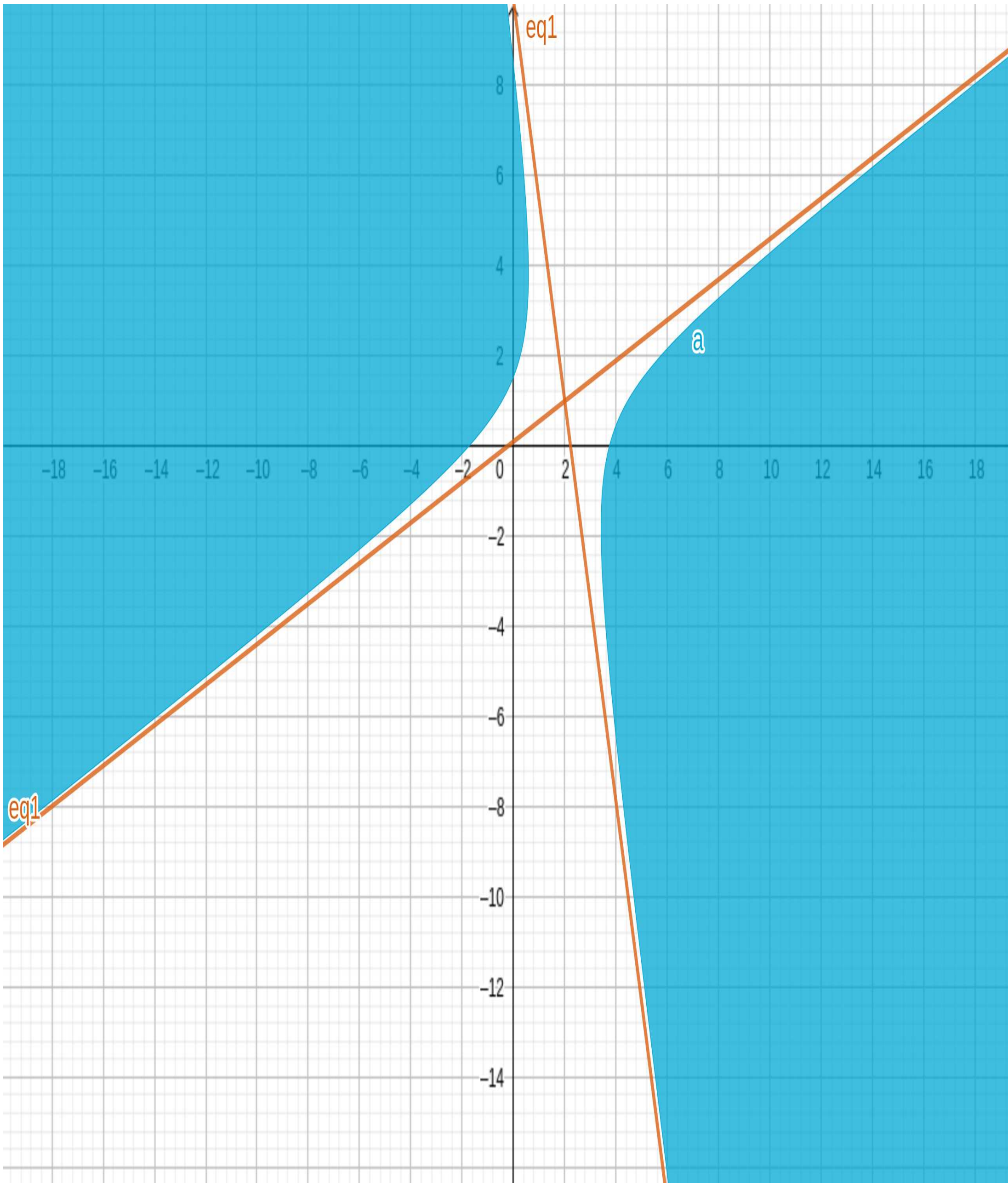
$2(2+x')^2-4(2+x')(1+y')-(1+y')^2-4(2+x')+10(1+y')-13=0$

$\Leftrightarrow 2x'^2-4x'y'-y'^2=12.$

$\Leftrightarrow 2\underbrace{(x'-y')}_{x''}{}^2-3\underbrace{y'}_{y''}{}^2=12$ (méthode de Gauss)

$\Leftrightarrow 2x''^2 - 3y''^2 = 12$

hyperbole.




**2)**

$9x^2 + 24xy + 16y^2 - 20x + 15y = 0$

La partie quadratique est de signature $(1,0)$:

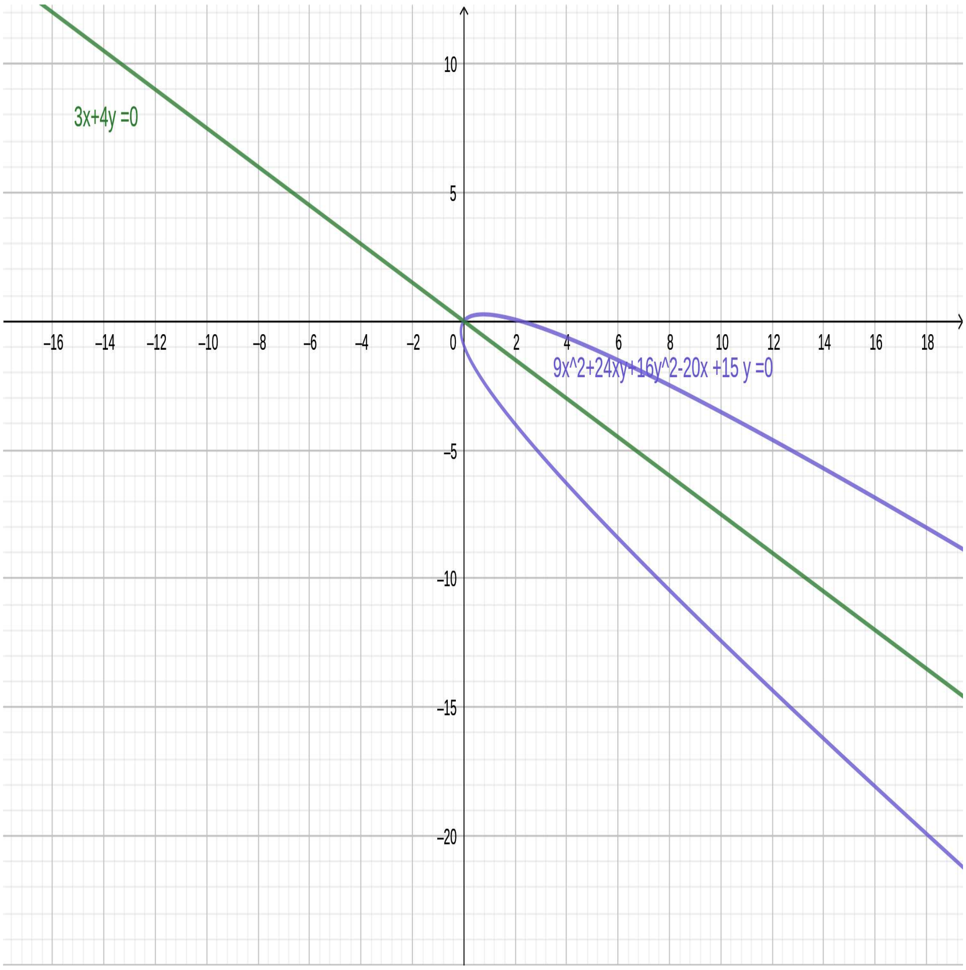
$9x^2+24xy+16y^2=(3x+4y)^2$

Équation devient :

$(3x+4y)^2-5(4x-3y)=0.$

c-à-d. : $x'^2-5y'=0$ où $x'=3x+4y$ et $y'=4x-3y$.

Parabole ...




Axe de symétrie = droite $3x+4y=0 \, (x'=0)$

**3)**

$3x^2+2xy+3y^2+10x-2y+1=0$

Partie quadratique : $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ donc signature $=(2,0)$. (Le déterminant $>0$ et le 1er coefficient $>0$).

On a donc une ellipse ou un point ou l'ensemble vide.

Pour distinguer, on va chercher le centre :

c'est le point de coordonnées $(x_0,\ y_0)$ qui annule les dérivées partielles $\partial_x F$ et $\partial_y F$ de l'équation $F = 3x^2 + 2xy + 3y^2 + 10x - 2y + 1$.

On résout le système : $\begin{cases} 6x + 2y + 10 = 0 \\ 2x + 6y - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 1 \end{cases}$. En posant $x = -2 + x'$, $y = 1 + y'$, on trouve :

$3x'^2 + 2x'y' + 3y'^2 - 10 = 0 \Leftrightarrow 3\left(x' + \frac{y'}{3}\right)^2 + \frac{8}{3}y'^2 = 10$. C'est l'équation d'une ellipse.

Pour la tracer *sommairement* on peut placer le centre $(-2, 1)$ et tracer les droites $x' + \frac{y'}{3} = 0$ et $y' = 0$ puis dessiner *quelque chose qui* *ressemble* à une ellipse. Pour mieux dessiner, il faut chercher les axes principaux (dirigés par les vecteurs propres de la matrice ci-dessus ...)

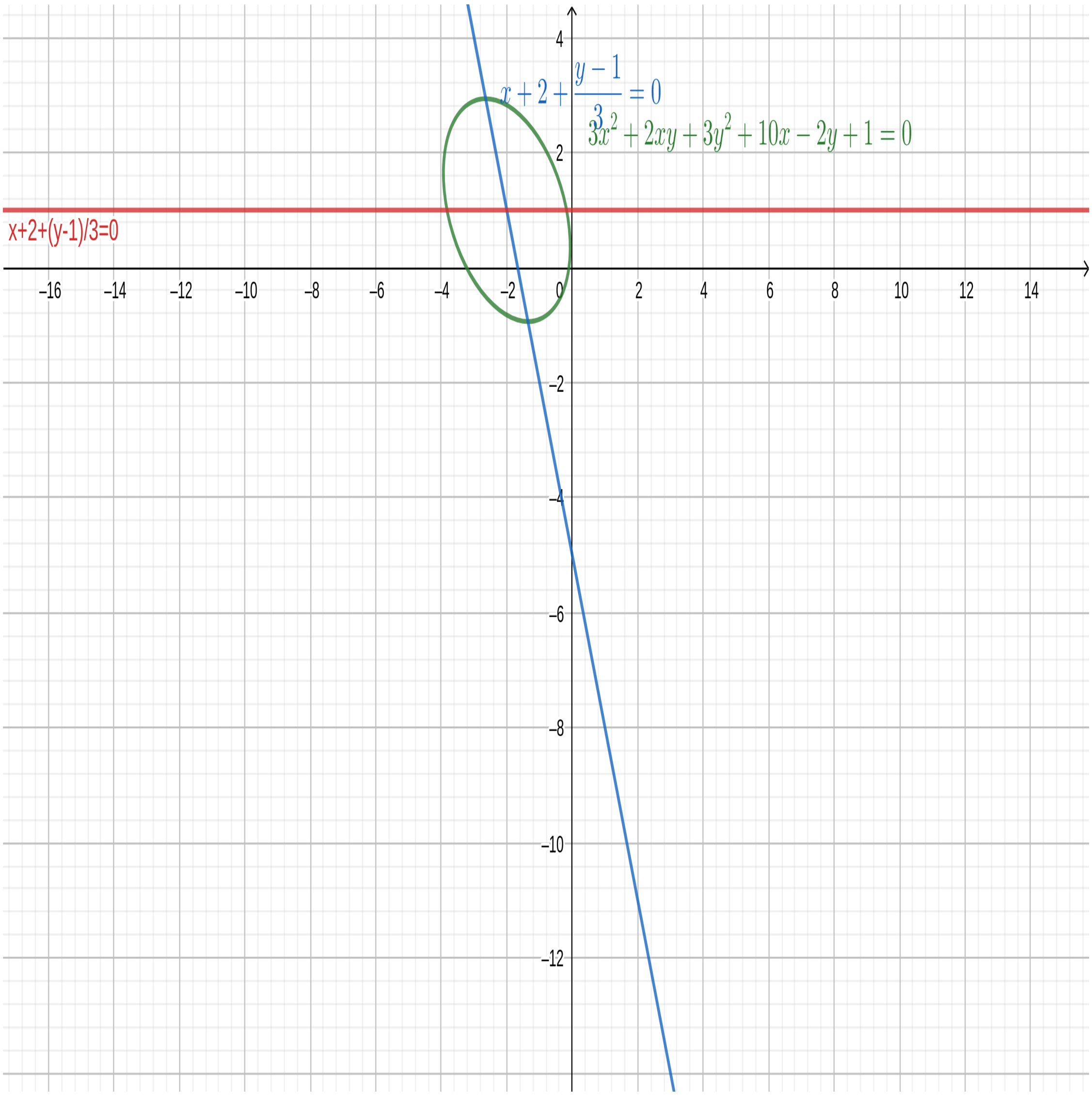



**Figure 1.**

**4)**

$x^2 - 6xy + y^2 + 6x - 2y = 1$

$\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ Signature $= (1,1)$ (car le déterminant est $<0$).

Donc on a une hyperbole ou deux droites.

Centre : $\begin{cases} 2x - 6y + 6 = 0 \\ -6x + 2y - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1. \end{cases}$

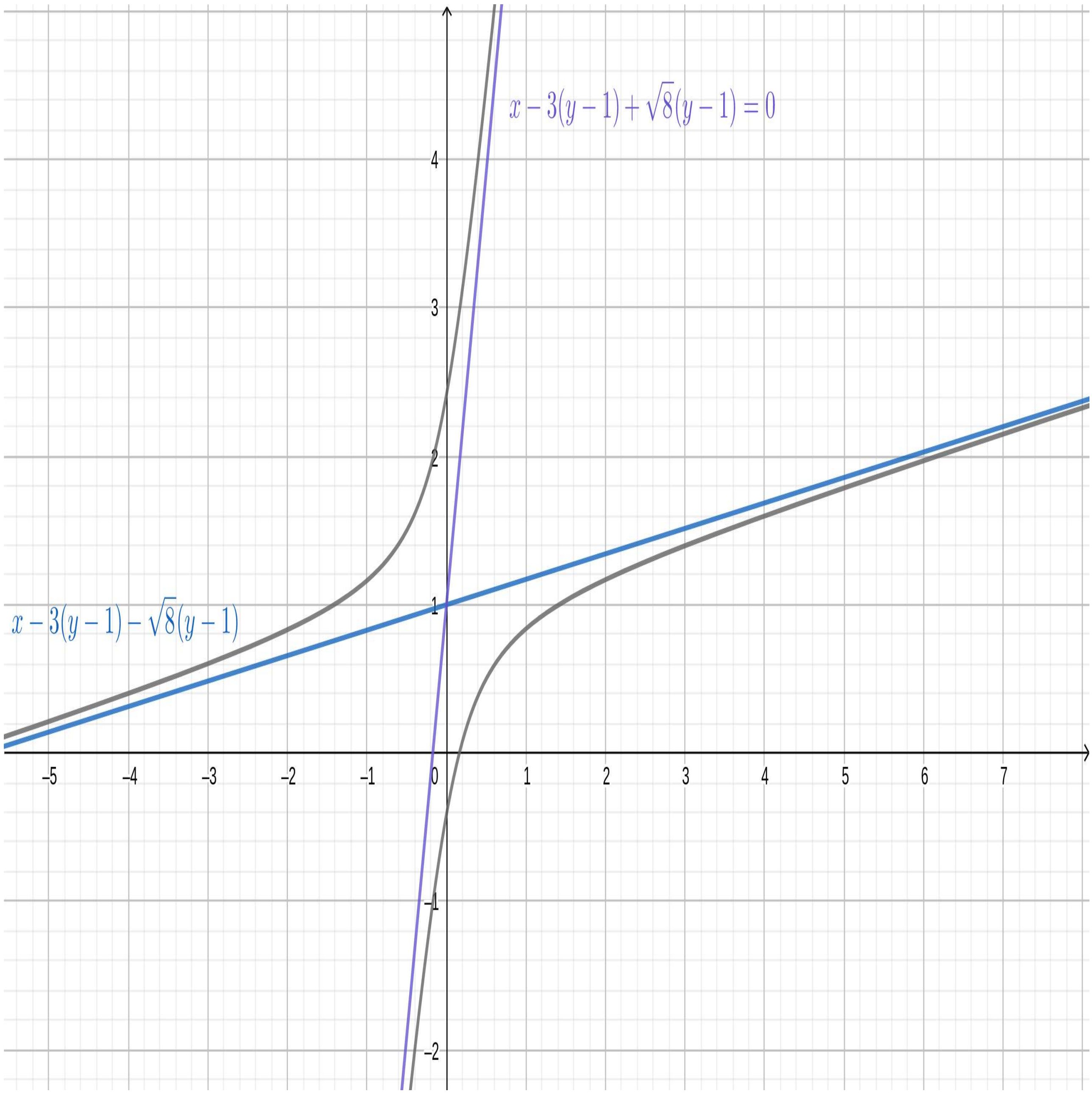
On pose $x = 3 + x'$ , $y = 1 + y'$.

On trouve une nouvelle équation :

$(x')^2 - 6x'(y' + 1) + (y' + 1)^2 + 6 \times x' - 2(y' + 1) = 1 \Leftrightarrow x'^2 - 6x'y' + y'^2 = 2 \Leftrightarrow (x' - 3y')^2 - 8y'^2 = 2.$

Pour tracer cette hyperbole, on place le centre et les droites $(x' - 3y')^2 - 8y'^2 = 0$ (les asymptotes) : $x' - 3y' = \pm\sqrt{8}\,y'$. Puis on dessine *quelque chose qui ressemble* à hyperbole.

Remarque : si $y' = 0$ pas de solution ! *Ceci permet de voir dans quels quarts de plan sont les branches d'hyperbole ...*



$x-3(y-1)+\sqrt{8}(y-1)=0$
$x-3(y-1)-\sqrt{8}(y-1)$
-5
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5
6
7
4
3
2
1
-1
-2