Correction des exercices 4 et 5 de la fiche sur les barycentres.

Exercice 4

Soit $M = \mathrm{bar}((A,\alpha),(B,\beta),(C,\gamma))$.

1. $M \epsilon (\mathrm{BC}) \Leftrightarrow \alpha = 0$. Donc $M \notin (\mathrm{BC}) \cup (\mathrm{CA}) \cup (\mathrm{AB}) \Leftrightarrow \alpha, \beta, \gamma \neq 0$.

2. $\alpha\overrightarrow{\mathrm{AM}} + \beta\overrightarrow{\mathrm{BM}} + \gamma\overrightarrow{\mathrm{CM}} = 0 \Rightarrow (\alpha+\beta+\gamma)\overrightarrow{\mathrm{AM}} = \beta\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \gamma\overrightarrow{\mathrm{BC}} = (\beta+\gamma)\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \gamma\overrightarrow{\mathrm{BC}}$.

Donc (AM)// (BC) $\Longleftrightarrow \beta + \gamma = 0$.

Donc [(AM) n'est pas parallèle à (BC), (BM) n'est pas parallèle à (AC), (CM) n'est pas parallèle à (AB)] $\Longleftrightarrow [\beta+\gamma \neq 0, \alpha+\beta \neq 0, \alpha+\gamma \neq 0]$.

3. $A' \epsilon$ (AM) donc $A' = \mathrm{bar}((A, x), (M, 1))$ pour un certain $x \epsilon \mathbb{R}$. En utilisant l'associativité du barycentre, on trouve :

$A' = \mathrm{bar}((A,x),(A,\alpha),(B,\beta),(C,\gamma)) = \mathrm{bar}((A,\alpha+x),(B,\beta),(C,\gamma))$.

Comme $A' \epsilon (\mathrm{BC})$, on doit avoir $\alpha + x = 0$. Donc $A' = \mathrm{bar}((B,\beta),(C,\gamma))$.

De même, $B' = \mathrm{bar}((A,\alpha),(C,\gamma))$ et $C' = \mathrm{bar}((A,\alpha),(B,\beta))$.

On a A'=bar((A,-α),(M,1)) donc $-\alpha\overrightarrow{A'A} + \overrightarrow{A'M} = 0 \Rightarrow (1-\alpha)\overrightarrow{A'M} + \alpha\overrightarrow{\mathrm{AM}} = 0$

$\Rightarrow M = \mathrm{bar}((A', 1-\alpha),(\mathrm{A},\alpha))$

De même, on trouve $M = \mathrm{bar}((B', 1-\beta),(\mathrm{B},\beta)) = \mathrm{bar}((C', 1-\gamma),(\mathrm{C},\gamma))$.

4. $A = \mathrm{bar}((A,1),(B,0),(C,0))$

$A' = \mathrm{bar}((A,0),(B,\beta),(C,\gamma))$

$P = \mathrm{bar}((A,x),(B,y),(C,z))$

$P \epsilon (AA') \Longleftrightarrow A, A', P$ alignés $\Longleftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & \gamma \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0 \quad \boxed{\Longleftrightarrow \beta z - \gamma y = 0}$.

Si $P = \mathrm{bar}((A,x),(B,y),(C,z))$, alors $x\overrightarrow{\mathrm{PA}} + y\overrightarrow{\mathrm{PB}} + z\overrightarrow{\mathrm{PC}} = 0 \Longleftrightarrow (x+y+z)\overrightarrow{\mathrm{PB}} = x\overrightarrow{\mathrm{AB}} - z\overrightarrow{\mathrm{BC}}$.

De même, $(\alpha+\beta+\gamma)\overrightarrow{\mathrm{MB}} = \alpha\overrightarrow{\mathrm{AB}} - \gamma\overrightarrow{\mathrm{BC}}$. Donc :

$\overrightarrow{\mathrm{PM}} = \overrightarrow{\mathrm{PB}} - \overrightarrow{\mathrm{MB}} = \left(\frac{x}{x+y+z} - \frac{\alpha}{\alpha+\beta+\gamma}\right)\overrightarrow{\mathrm{AB}} + (?)\overrightarrow{\mathrm{BC}}$.

Donc (PM)//(BC) $\Longleftrightarrow$ $\frac{x}{x+y+z}$ - $\frac{\alpha}{\alpha+\beta+\gamma}$=0. Si on suppose $x+y+z=\alpha+\beta+\gamma=1$, alors les points de la droite passant par M et parallèle à (BC) ont pour coordonnées barycentriques :

$(A,x),(B,y),(C,z)$

où$x+y+z=1$ et $x=\alpha$.

Exercice 5.

1. Si $A,\ B\epsilon\mathcal{E}$, alors $[A,\ B]=\{\mathrm{bar}((\mathcal{F}A,\ a),\ (B,\ b))\mid a,\ b\geqslant 0\}$. Si $C=\mathrm{bar}((A,\ x),\ (B,\ y))$ et $D=\mathrm{bar}((A,x'),(B,y'))$, alors pour tous $z,t\geqslant 0$, on a :

$$\mathrm{bar}((C,z),(D,t))=\mathrm{bar}\left(\left(A,\underbrace{zx+tx'}_{\geqslant 0}\right),\left(B,\underbrace{zy+ty'}_{\geqslant 0}\right)\right)\epsilon\,[A,B].$$

C'est vrai pour tout $C,D\epsilon\,[A,B]$, donc $[A,B]$ est convexe.

Même raisonnement avec$]A,B[=\ \{\mathrm{bar}((A,a),(B,b))\,|\,a,b>0\}$.

2. Soit $\mathcal{F}$ un sous-espace affine de $\mathcal{E}$. Soient $A,B\epsilon\,\mathcal{E}$. Alors tous les barycentres de A,B sont dans $\mathcal{F}$ a fortiori tous les barycentres à coefficients $\geqslant$0. Donc $[A,B]\subset\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}$ est bien convexe.

3. Soit $\mathcal{C}$ un convexe de $\mathbb{R}$. Soit $a=\inf\ \mathcal{C}$ et $b=\sup\ \mathcal{C}$. Alors $]a,b[\ \subset\mathcal{C}\subset[a,b]$.

En effet, si $a<x<b$, alors il existe $a',b'\epsilon\,\mathcal{C}$ tels que :

$a<a'<x<b'<b$.

Alors $x\epsilon[a',b']\subset\ \mathcal{C}$. Donc $]a,b[\subset\ \ \mathcal{C}$. L'autre inclusion est évidente.

Donc $\mathcal{C}$ est un intervalle.

4. déjà fait.

5. Si $r=1$, c'est évident. Supposons que les barycentres de r points de X à coefficients $\geqslant$ 0 sont dans X. Alors si $A_{1,\ldots.,}A_{r+1}\,\epsilon X$, si $a_{1,\ldots,}a_{r+1}\geqslant 0$, on a:

$$\mathrm{bar}\left(\underbrace{(A_1,a_1),\ldots,(A_r,a_r)}_{(B,a_{1+\ldots.+}a_r)},\ (A_{r+1},\ a_{r+1})\right)=\mathrm{bar}((B,\ a_1+\ldots.+a_r),\ (A_{r+1},\ a_{r+1}))\epsilon X$$ (comme barycentre de deux points de X)

où $B=\mathrm{bar}\,(A_{1,}a_1),\ldots,(A_r,a_r)\epsilon X$ par hypothèse de récurrence.

6. Soit $\mathcal{C}_i,\ i\epsilon I$ une famille de convexes. Si $A,\ B\epsilon\ \bigcap_i\ \mathcal{C}_i$, alors $[A,\ B]\subset\mathcal{C}_i$ pour tout i donc $[A,B]\,\epsilon\bigcap_i\mathcal{C}_i$.

Donc $\bigcap_i \mathcal{C}_i$ est convexe.

Les segments $[0,1]$ et $[1,2]$ sont convexes mais leur union ne l'est pas (ce n'est pas un intervalle !)

7. Soit $B = \{\mathrm{bar}((A_1, a_1), \ldots, (A_r, a_r)) \,|\, r \geqslant 0, A_1, \ldots, A_r \epsilon X, a_1, \ldots., a_r \geqslant 0\}$. Alors bien entendu B est contenu dans tout convexe contenant X d'après la question 5.

Donc $B \subset \mathrm{Conv}\, X$.

Inclusion réciproque : montrons que B est convexe. Soient $B_1, B_2 \epsilon B$ où $B_{i=}\mathrm{bar}\big(\big(A_1^i,\ a_1^i\big),\ \ldots,\ \big(A_{r_i}^i, a_{r_i}^i\big)\big)$ pour certains points A_j^i de X et certains coefficients $a_j^i \geqslant 0$.

Si $b_{1,} b_2 \geqslant 0$, alors par la propriété d'associativité du barycentre, on a :

$\mathrm{bar}((B_1, b_1), (B_2, b_2)) = \mathrm{bar}((A_{1,}^1 b_1 a_1^1), \ldots., (A_{r_1,}^1 b_1 a_{r_1}^1), (A_1^2, b_2 a_1^2) \ldots, (A_{r_2}^2, b_2 a_{r_2}^2)) \epsilon X.$

Donc $[B_1, B_2] \subset X$. Conclusion B est convexe et B=Conv$X$.