Exercice 2.6 nombres de Fibonacci

1) Soit $E \subseteq \{1, ..., n\}$ tel que E ne contient pas deux éléments consécutifs.

(*) Ou bien $n \notin E$ et alors $E \subseteq \{1, ..., n-1\}$. Ou bien $n \in E$ et alors $n-1 \notin E$ et $E = E \cap \{1, ..., n-2\} \cup \{n\}$.

On a donc $f(n) = f(n-1) + f(n-2)$.

Or $f(1) = |\{\varnothing, \{1\}\}| = 2$ et $f(2) == |\{\varnothing, \{1\}, \{2\}\}| = 3$.

On en déduit que $\forall\, n \geqslant 1,\ f(n) = F_{n+2}$.

2) Soit $f(n,k)$ le nombre de parties de $\{1, ..., n\}$ de cardinal k qui ne contiennent pas deux entiers consécutifs.

En raisonnant comme dans (*), on trouve : $f(n,k) = f(n-1,k) + f(n-2,k-1)$.

Démontrons par récurrence sur $n \geqslant 1$ que :

$$\forall\, k \in \mathbb{N},\ f(n,k) = \binom{n-k+1}{k} .$$

C'est vrai si $n = 1$ car $f(1,k) = 1$ si $k = 0$, 1, si $k = 1$, 0 si $k \geqslant 2$. C'est vrai aussi si $n = 2$ car $f(2,k) = 1$ $k = 0$, $= 2$ si $k = 1$, $= 0$ si $k \geqslant 2$.

On suppose que $\binom{\forall\, k \in \mathbb{N},\, f(l,k) = l-k+1}{k}$ pour tout $l \geqslant n-1$.

Alors $f(n,k) = f(n-1,k) + f(n-2,k-1) = \binom{n-1-k+1}{k} + \binom{n-2-(k-1)+1}{k-1}$ par hypothèse de récurrence. Donc $f(n,k) = \binom{n-k}{k} + \binom{n-k}{k-1} = \binom{n-k+1}{k}$ (*relation usuelle des coefficients binomiaux !*)

D'un autre côté, on a :

$$\sum_{k=0}^{n} f(n,k) = f(n) = F_{n+2} \ .$$

Question supplémentaire. Expression de F_n.

On pose $F(x) = \sum_{n \geqslant 1} F_n x^n$.

Alors

$$\begin{aligned} F(x) &= x + x^2 + \sum_{n \geqslant 3} F_n x^n \\ &= x + x^2 + \sum_{n \geqslant 3} (F_{n-1} x^n + F_{n-2} x^n) \\ &= x + x^2 + x \sum_{n \geqslant 3} F_{n-1} x^{n-1} + x^2 \sum_{n \geqslant 3} F_{n-2} x^{n-2} \\ &= x + x^2 + x \sum_{n \geqslant 2} F_n x^n + \sum_{n \geqslant 1} F_n x^n \\ &= x + x^2 + x(F(x) - x) + x^2 F(x) \end{aligned}$$

Donc $(1 - x - x^2)F(x) = x \Leftrightarrow F(x) = \frac{x}{1-x-x^2}$ dans $\mathbb{R}[[x]]$.

Or on peut décomposer la fraction $\frac{x}{1-x-x^2}$ en éléments simples.

Puisque $1 - x - x^2 = -(x - \delta_1)(x - \delta_2)$ où $\delta_1 = -\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\delta_2 = -\frac{1-\sqrt{5}}{2}$, on a :

$$F(x) = \frac{x}{1 - x - x^2} = \frac{\lambda}{x - \delta_1} + \frac{\mu}{x - \delta_2}$$

avec $\lambda = \frac{\delta_1}{-2\delta_1 - 1} =$ et $\mu = \frac{\delta_2}{-2\delta_2 - 1}$. Donc

$$F(x) = -\frac{\lambda}{\delta_1} \frac{1}{1 - \frac{x}{\delta_1}} - \frac{\mu}{\delta_2} \frac{1}{1 - \frac{x}{\delta_2}}$$

$$= -\frac{\lambda}{\delta_1} \sum_{n \geqslant 0} \left(\frac{x}{\delta_1}\right)^n - \frac{\mu}{\delta_2} \sum_{n \geqslant 0} \left(\frac{x}{\delta_2}\right)^n \ .$$

Donc :

$$\forall\, n \geqslant 1,\ F_n = -\frac{\lambda}{\delta_1}\frac{1}{\delta_1^n} - \frac{\mu}{\delta_2}\frac{1}{\delta_2^n}$$

$$= \frac{2}{5-\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{1}{5+\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} \right) \ .$$

3.3 Ensembles dénombrables ou non

1) L'application $f\ :\ \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $(p,q) \mapsto 1 + ... + (p+q) + q = \frac{(p+q)(p+q+1)}{2} + q$ est bijective.
Injectivité.
En effet, si k est fixé l'application $q \mapsto f(k-q,q)$ est strictement croissante sur $[\![0,k]\!]$.
Donc $\forall\, p,q \in \mathbb{N}$, $f(p+q,0) \leqslant f(p,q) \leqslant f(0,p+q)$.
Donc
$$p+q < p'+q' \Rightarrow f(p,q) \leqslant f(0,p+q) = (1 + ... + (p+q)) + p + q$$
$$< 1 + ... + (p+q) + p + q + 1 \leqslant 1 + ... + (p'+q') = f(p'+q',0) \leqslant f(p',q')$$
d'où : $p+q < p'+q' \Rightarrow f(p,q) < f(p',q')$.
On en déduit que $f(p,q) = f(p',q') \Rightarrow p+q = p'+q'$.
Posons dans ce cas $k = p+q = p'+q'$. On a $f(p,q) = \frac{k(k+1)}{2} + q = f(p',q') = \frac{k(k+1)}{2} + q' \Rightarrow q = q'$. Donc $p = k - q = k - q' = p'$.
Surjectivité.
Soit $N \in \mathbb{N}$. Soit k le plus grand entier tel que $\frac{k(k+1)}{2} \leqslant N$.
Alors
$$1 + ... + k \leqslant N < 1 + ... + k + (k+1) \ .$$
Posons $q = N - (1+...+k)$. Alors $0 \leqslant q < 1+...+k+(k+1)-(1+...+k) = k+1 \Rightarrow 0 \leqslant q \leqslant k$.
Donc si on pose $p = k - q$, on a $p \in \mathbb{N}$ et $f(p,q) = (1 + ... + k) + q = N$.
On en déduit que si I, J sont des ensembles dénombrables, alors $I \times J$ aussi. En effet, il existe des bijections $f_1 : \mathbb{N} \to I$, $f_2 : \mathbb{N} \to J$. Alors $(f_1, f_2) : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to I \times J$, $(x,y) \mapsto (f_1(x), f_2(y))$ est une bijection. Donc $\mathbb{N} \overset{1:1}{\leftrightarrow} \mathbb{N} \times \mathbb{N} \overset{1:1}{\leftrightarrow} I \times J$.
Voici une bijection $\mathbb{N} \to \mathbb{Z}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $2n \mapsto n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$, $2n-1 \mapsto -n$.

2) Si E est un ensemble si $f : E \to \mathscr{P}(E)$ est une application, alors f n'est jamais surjective (en particulier $|E| < \mathscr{P}(E)$ même si E est infini).
En effet soit $A = \{x \in E\ :\ x \notin f(x)\}$, alors $\forall\, y \in E$, $A \neq f(y)$ car $y \in f(y) \Rightarrow y \notin A$ et $y \notin f(y) \Rightarrow y \in A$.

3) *Argument de la diagonale de Cantor.* Tout réel $0 \leqslant x < 1$ admet un développement décimal unique :
$$x = \sum_{n \geqslant 1} \frac{a_n}{10^n}$$
où les $a_i \in \{0, ..., 9\}$ et la suite (a_n) n'est pas constante égale à 9 à partir d'un certain rang. On notera $x[n] = a_n$ le $n-$ième chiffre du développement décimal de x.
Supposons par l'absurde que $[0, 1[= \{x_n \ : \ n \geqslant 1\}$. Soit $y \in [0, 1[$ le réel de développement décimal $y = \sum_{n \geqslant 1} \frac{y_n}{10^n}$ où $y_n = 0$ si $x_n[n] \neq 0$ et $y_n = 1$ si $x_n[n] = 0$.
Il est clair que pour tout $n \geqslant 1$, $y \neq x_n$ car $y[n] = y_n \neq x_n[n]$. D'où la contradiction.

4) Montrons que $\mathbb{R} \overset{1:1}{\leftrightarrow} \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$.
L'application $\{0, 1\}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$, $(a_n) \mapsto \sum_{n \geqslant 0} \frac{a_n}{3^n}$ est injective. Donc $|\{0, 1\}^{\mathbb{N}}| \leqslant |\mathbb{R}|$.
L'application $\mathbb{R} \to \mathscr{P}(\mathbb{Q})$, $x \mapsto]-\infty, x] \cap \mathbb{Q}$ est injective. En effet, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sup]-\infty, x] \cap \mathbb{Q} = x$.
Or $\mathbb{Q}$ est dénombrable (par exemple car on a une surjection $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}_{>0} \to \mathbb{Q}$, $(p, q) \mapsto \frac{p}{q}$ et $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}_{>0}$ est dénombrable !).
Donc $\mathbb{Q} \overset{1:1}{\leftrightarrow} \mathbb{N} \Rightarrow \mathscr{P}(\mathbb{Q}) \overset{1:1}{\leftrightarrow} \mathscr{P}(\mathbb{N}) \overset{1:1}{\leftrightarrow} \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$.
On a donc une injection $\mathbb{R} \to \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$. Donc $|\mathbb{R}| \leqslant |\{0, 1\}^{\mathbb{N}}|$. Donc $\mathbb{R} \overset{1:1}{\leftrightarrow} \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$.

3.4 Caractérisation d'ensembles infinis

1) Soient $a < b \in \mathbb{R}$. Voici une injection $\mathbb{N} \to]a, b[$, $n \mapsto a + \frac{b-a}{2^n}$.
Donc l'intervalle $]a, b[$ est infini.

2) Montrons que E est fini $\Leftrightarrow$ toute partie non vide de $\mathscr{P}(E)$ a un élément maximal pour l'inclusion.
$\Rightarrow$: Soit E fini. Soit $(I_a)_{a \in A}$ une famille de sous-ensembles de E (où A est un ensemble quelconque non vide). Soit $N = \max\{|I_a| \ : \ a \in A\}$. L'entier N existe car tous les $|I_a|$ sont majorés par $|E|$. Il existe donc $a_0 \in A$ tel que $|I_{a_0}| = N$. L'élément I_{a_0} est maximal car si $a \in A$ et si $I_{a_0} \subseteq I_a$ alors par maximalité, $|I_a| \leqslant N = |I_{a_0}| \Rightarrow I_a = I_{a_0}$.
$\Leftarrow$: Si E est infini, il existe une partie de E de la forme $\{x_n \ : \ n \in \mathbb{N}\}$ où les x_i sont deux à deux distincts. La famille non vide $I_n = \{x_1, ..., x_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, n'a pas d'élément maximal. En effet, on a pour tout $n_0 \in \mathbb{N}$, $I_{n_0} \overset{\subseteq}{\neq} I_{n_0+1}$.

Ensembles non dénombrables

1) Soit F infini. Soit $A \subseteq F$ une partie finie.
Alors $F \backslash A$ est infini (sinon F serait fini). Soit donc $\mathbb{N} \to F \backslash A$, $n \mapsto x_n$ une injection. Notons $x_{-k}, ..., x_{-1}$ les éléments (distincts) de A, $k \geqslant 0$. On a donc $\underbrace{\{x_{-k}, ..., x_{-1}\}}_{=A} \cup \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq F$.

Voici une bijection :
$$F \to F \setminus A, \, x \mapsto \begin{cases} x & \text{si } x \notin \{x_m \ : \ m \geqslant -k\} \\ x_{n+k} & \text{si } x = x_n, \, n \geqslant -k \end{cases}$$
C'est bien une bijection car voici la réciproque :
$$F \setminus A \to F, \, x \mapsto \begin{cases} x & \text{si } x \notin \{x_m \ : \ m \in \mathbb{N}\} \\ x_{n-k} & \text{si } x = x_n, \, n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$
Si F est fini, ce n'est pas vrai. Par exemple $F \setminus F = \varnothing$ n'est pas équipotent à F.

2) Supposons que I est un sous-ensemble dénombrable de F et que F n'est pas dénombrable. On peut noter $I = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ les élements distincts de I. Comme F n'est pas dénombrable, $F \setminus I$ est infini. Soit $\mathbb{N} \to F \setminus I$, $n \mapsto y_n$ une injection.
Voici une bijection (et sa réciproque) :

$$F \to F \setminus I$$

$$x \mapsto x \text{ si } x \notin \{x_n \ : \ n \in \mathbb{N}\} \cup \{y_n \ : \ n \in \mathbb{N}\}, y_{2n} \text{ si } x = y_n, n \in \mathbb{N}, y_{2n+1} \text{ si } x = x_n, n \in \mathbb{N}$$

$$F \setminus I \to F$$

$$x \mapsto x \text{ si } x \notin \{y_n \ : \ n \in \mathbb{N}\}, y_n \text{ si } x = y_{2n}, n \in \mathbb{N}, x_n \text{ si } x = y_{2n+1}, n \in \mathbb{N}$$

La réciproque est fausse car par exemple $\mathbb{N} \setminus \mathbb{N} = \varnothing$ n'est pas équipotent à $\mathbb{N}$.