2.5 Principe des tiroirs

1. Soit A_h l'ensemble des habitants nés à l'heure h où h est une heure entre le 5/10/1921 à 9h45 et le 5/10/2021 à 9h45. Oublions les années bissextiles, $1 \leqslant h \leqslant k = 100.365.24 = 876000$.
   Supposons que $|A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_k| = 7500000$.
   Alors comme $7500000 > 7k = 6132000$, il existe h tel que $|A_h| > 7$ *c-à-d* $|A_h| \geqslant 8$.
2. Comme $\mathbb{N}$ est infini et $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ est fini, l'application $\mathbb{N} \to \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$, $i \mapsto 2^i \bmod q$ n'et pas injective. Donc il existe $i \neq j \in \mathbb{N}$ tels que $2^i = 2^j \bmod q$. Mais alors, si par exemple $i < j$, on a :
   $$\begin{aligned} 2^i = 2^j \bmod q &\Leftrightarrow q | 2^j - 2^i = 2^i(2^{j-i} - 1) \\ &\Rightarrow q | 2^{j-i} - 1 \end{aligned}$$
   car q est impair.

Dénombrements élémentaires
4.1 Inverse de la matrice de Pascal
On a :
$$x^n = \sum_{k=0}^{n} b_{n,k}(x+1)^k \Leftrightarrow (x-1)^n = \sum_{k=0}^{n} b_{n,k}x^k$$
Donc $\forall\, n, k \in \mathbb{N}$, $b_{n,k} = \binom{n}{k}(-1)^{n-k}$.
Notons $P = (\binom{n}{k})_{\substack{0\leqslant k\leqslant m\\ 0\leqslant n\leqslant m}} \in \mathscr{M}_{m+1}(\mathbb{Q})$.
Comme $(x+1)^n = \sum_{k=0}^{m} \binom{n}{k} x^k$ pour tous $0 \leqslant k \leqslant n \leqslant m$, on a
$$P = P_e^f$$
matrice de passage de la base $e = \{x^0, ..., x^m\}$ dans la base $\{(x+1)^0, ..., (x+1)^m\}$ du $\mathbb{Q}-$espace vectoriel $\mathbb{Q}[x]_{\leqslant m}$ des polynômes rationnels de degré $\leqslant m$.
Donc P est inversible et $P^{-1} = P_f^e = ((-1)^{n-k}\binom{n}{k})_{\substack{0\leqslant k\leqslant m\\ 0\leqslant n\leqslant m}}$.

4.2
Soit $x \in \mathbb{N}$.
Notons $\mathscr{F} = \{f : [\![1, n]\!] \to [\![1, x]\!]\}$
et pour tout k, $\mathscr{F}_k = \{f : [\![1, n]\!] \to [\![1, x]\!] \ : \ |\mathrm{Im} f| = k\}$.
Il est clair que $\mathscr{F} = \sqcup_{k=0}^{n} \mathscr{F}_k$ car si f est une application sur $[\![1, n]\!]$, alors $|\mathrm{Im} f| \leqslant n$.
Donc
$$|\mathscr{F}| = \sum_{k=0}^{n} |\mathscr{F}_k| \ .$$
Or $|\mathscr{F}| = x^n$.
De plus
$$\mathscr{F}_k = \sqcup_{\substack{I\subseteq [\![1,x]\!]\\ |I|=k}} \mathscr{F}_I$$
où $\mathscr{F}_I = \{f : [\![1, n]\!] \to [\![1, x]\!] \ : \ \mathrm{Im} f = I\}$.
Or le cardinal des applications surjectives
$$f : [\![1, n]\!] \to I$$
ne dépend que du cardinal de I, c'est $k!S(n, k)$ où $k = |I|$.

Donc pour tout $x \in \mathbb{N}$,

$$x^n = \sum_{k=0}^{n} k!S(n,k)\binom{x}{k} \ .$$

Puisque c'est vrai pour tout $x \in \mathbb{N}$, on en déduit l'égalité :

$$x^n = \sum_{k=0}^{n} k!S(n,k)\binom{x}{k}$$

dans $\mathbb{Q}[x]$ où $\binom{x}{k} = \frac{x(x-1)\dots(x-k+1)}{k!}$.

4.3

1) Montrons par récurence sur $k \geqslant 0$ que :

$$\forall\, n \in \mathbb{Z},\ \Delta^k f(n) = \sum_{i=0}^{k}(-1)^{k-i}\binom{k}{i}f(n+i) \ .$$

Pour $k = 0$, c'est vrai.
Supposons que c'est vrai pour $k-1$, $k \geqslant 1$.
Alors

$$\begin{aligned}\forall\, n \in \mathbb{Z},\ \Delta^k f(n) &= \Delta(\Delta^{k-1}f)(n)\\ &= \Delta^{k-1}f(n+1) - \Delta^{k-1}f(n)\\ &= \sum_{i=0}^{k-1}(-1)^{k-1-i}\binom{k-1}{i}f(n+1+i) - \sum_{i=0}^{k-1}(-1)^{k-1-i}\binom{k-1}{i}f(n+i)\end{aligned}$$

par hypothèse de récurrence

$$= \sum_{j=1}^{k}(-1)^{k-j}\binom{k-1}{j-1}f(n+j) - \sum_{i=0}^{k-1}(-1)^{k-1-i}\binom{k-1}{i}f(n+i)$$

en posant $j = i+1$ dans la première somme

$$= \sum_{i=0}^{k}\left((-1)^{k-i}\binom{k-1}{i-1}f(n+i) - (-1)^{k-1-i}\binom{k-1}{i}f(n+i)\right)$$

$$= \sum_{i=0}^{k}(-1)^{k-i}(\binom{k-1}{i-1} + \binom{k-1}{i})f(n+i)$$

$$= \sum_{i=0}^{k}(-1)^{k-i}\binom{k}{i}f(n+i)$$

ce qui termine la récurence.

2) L'application $\Delta : \mathbb{C}[x] \to \mathbb{C}[x]$ est linéaire. De plus

$$\Delta x^d = (x+1)^d - x^d = dx^{d-1} + \binom{d}{2}x^{d-2} + \dots + \binom{d}{d} \ .$$

On en déduit que $\deg \Delta f = \deg f - 1$ (si f est de degré $\geqslant 1$, si f est constant, $\Delta f = 0$).

Donc $\deg \Delta^{d+1} f \leqslant \deg f - d - 1$.
En particulier si f est de degré $\leqslant d$, $\Delta^{d+1} f = 0$.
Réciproquement, si $\Delta^{d+1} f = 0$, alors $\deg f \leqslant d$ car sinon

$$\deg f > d \Rightarrow \deg \Delta^{d+1} f = \deg f - d - 1 \geqslant 0 \Rightarrow \Delta^{d+1} f \text{ non nul}$$

absurde !

3) Soit $f \in \mathbb{C}[x]$ de degré $\leqslant d$. Comme les polynômes

$$\binom{x}{k} = \frac{x(x-1)...(x-k+1)}{k!}, \; 0 \leqslant k \leqslant d$$

forment une base de $\mathbb{C}[x]_{\leqslant d}$, il existe des coefficients $c_k \in \mathbb{C}$ tels que

$$f = \sum_{k=0}^{d} c_k \binom{x}{k} \; .$$

On en déduit, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, pour tout $l \in \mathbb{N}$,

$$\Delta^l f(n) = \sum_{k=0}^{d} c_k \Delta^l \binom{x}{k}(n)$$

par linéarité de l'opérateur Δ.
Or $\Delta\binom{x}{k} = \binom{x}{k-1}$. On en déduit

$$\Delta^l \binom{x}{k} = \binom{x}{k-l} \; .$$

Donc

$$\Delta^l f(0) = \sum_{k=0}^{d} c_k \binom{x}{k-l}(0)$$

et puis que $\binom{x}{p}(0) = 0$ si $p \neq 0$ et 1 si $p = 0$, on trouve :

$$\Delta^l f(0) = c_l$$

pour tout l.
Donc

$$\begin{aligned} \forall\, n \in \mathbb{N},\, f(n) &= \sum_{k=0}^{d} \Delta^k f(0) \binom{n}{k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \Delta^k f(0) \binom{n}{k} \end{aligned}$$

Car si $d < n$, $\Delta^k f = 0$ pour tout $d < k \leqslant n$, d'après la question précédente. Et si $d > n$, $\binom{n}{k} = 0$ si $n < k \leqslant d$.

4) D'après l'exercice précédent,

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\, n^d = \sum_{k=0}^{n} k! S(d,k) \binom{n}{k} \; .$$

Donc $k!S(d,k) = \Delta x^d(0)$.

4.4

a) Une partition de $[\![1, n+1]\!]$ est de la forme :

$$[\![1, n]\!] = A_1 \sqcup A_2 \sqcup ... \sqcup A_d$$

On peut choisir la numérotation telle que $n + 1 \in A_1$. Comptons les partitions de $[\![1, n+1]\!]$ suivant le cardinal de A_1.
Pour chaque A_1 fixé, il faut compter le nombre de partitions de l'ensemble $[\![1, n+1]\!] \backslash A_1 = A_2 \sqcup ... \sqcup A_d$ qui ne dépend que du cardinal de A_1 !
Donc

$$B_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} B_{n+1-k}$$

car choisir A_1 de cardinal k contenant $n+1$ revient à chaoisir une partie à k éléments de $[\![1, n]\!]$
Donc :

$$B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_{n-k}$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k$$

En particulier, $B_0 = 1$, $B_1 = 1$, $B_2 = 2$, $B_3 = 5$, $B_4 = 15$.

b) Démontrons par récurrence sur $n \geqslant 0$ que :

$$B_n = \frac{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^n}{k!}}{e} \quad .$$

C'est vrai si $n = 0$ car $B_0 = 1$ et $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = e$.
Supposons que c'est vrai pour tout $0 \leqslant m \leqslant n$, $n \geqslant 0$.
Démontrons-le pour $n + 1$.

$$B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{\sum_{l=0}^{\infty} \frac{l^k}{l!}}{e}$$

par hypothèse de récurrence

$$= \frac{\sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} l^k}{e}$$

$$= \frac{\sum_{l=0}^{\infty} \frac{(l+1)^n}{l!}}{e}$$

$$= \frac{\sum_{l=1}^{\infty} \frac{l^n}{(l-1)!}}{e}$$

or, $\frac{l^n}{(l-1)!} = \frac{l^{n+1}}{l!}$.

Donc

$$\begin{aligned} B_{n+1} &= \frac{\sum_{l=1}^{\infty} \frac{l^{n+1}}{l!}}{e} \\ &= \frac{\sum_{l=0}^{\infty} \frac{l^{n+1}}{l!}}{e} \end{aligned}$$

ce qui termine la récurrence.

Exercice supplémentaire

Soit $N, d \in \mathbb{N}$. L'objectif est de calculer

$$\left|\{(a_1, ..., a_N) \in \mathbb{N}^N \ : \ a_1 + ... + a_N = d\}\right| \ .$$

méthode 1) On a

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1-X)^N} &= (\sum_{i_1 \geqslant 0} X^{i_1})...(\sum_{i_N \geqslant 0} X^{i_N}) \\ &= \sum_{d \geqslant 0} (\sum_{\substack{i_1, \dots, i_N \in \mathbb{N} \\ i_1 + \dots + i_N = d}} 1) X^d \\ &= \sum_{d \geqslant 0} N_d X^d \end{aligned}$$

inutile de se poser des questions de convergence, on peut carlculer dans l'anneau des séries formelles $\mathbb{Q}[[X]]$ *(c'est comme les polynômes sauf qu'il peut y avoir une infinité de coefficients non nuls !)*

Donc N_d est le coefficient de degré d de la série $\frac{1}{(1-X)^N}$.

Or,

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1-X)^N} &= \frac{1}{(n-1)!} \left(\frac{1}{1-X}\right)^{(n-1)} \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \sum_{k \geqslant 0} (X^k)^{(n-1)} \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \sum_{k \geqslant 0} k(k-1)(k-n+2) X^{k-n+1} \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \sum_{d \geqslant 0} (d+n-1)(d+n-2)(d+1) X^d \ . \end{aligned}$$

Donc

$$N_d = \binom{d+n-1}{n-1} = \binom{d+n-1}{d} \ .$$

méthode 2) Dans la formule :

$$a_1 + ... + a_N = d$$

si on remplace chaque a_i par autant de « bâtonnets » |, on obtient un mot avec les « lettres » | et + :

$$\underbrace{|||...|}_{a_1} + \underbrace{|...|}_{a_2} + ... + \underbrace{|...|}_{a_N} \ .$$

Il y a en tout d fois la lettre $|$ et $N-1$ fois la lettre $+$.
On obtient ainsi une bijection entre

$$\{(a_1, ..., a_N) \in \mathbb{N}^N \ : \ a_1 + ... + a_N = d\}$$

et l'ensemble des mots de longueur $N+d-1$

avec d fois la lettre $|$ et $N-1$ fois la lettre $+$.

Or, on sait compter le nombre de tels mots !
D'où, $N_d = \binom{n+d-1}{d}$