1.1

1) $473 = 27 \times 17 + 14$.
2) $473 + 13 = 27 \times 18$.
3) $473 + 39 = 27 \times 18 + 26$.

1.2

pouce	1	9		...	$1 \bmod 8$
index	2	8	10	...	2 ou $0 \bmod 8$
majeur	3	7	11	...	3 ou $7 \bmod 8$
annulaire	4	6	12	...	4 ou $6 \bmod 8$
auriculaire	5		13	...	$5 \bmod 8$

Or $1723 = 3 \bmod 8$, donc *« la distribution de pièces d'or se termine par le majeur »* .

1.3

1) $33 = 23 \times 1 + 10$. On peut augmenter le dividende ($= 33$) au plus par 12 pour garder le même quotient :
$$33 + 12 = 23 \times 1 + 22 \ .$$
Pour obtenir le quotient 0, il faut diminuer par au moins 11 et jusqu'à 33 :
$$33 - 11 = 23 \times 0 + 22 \ .$$

2) On a : $a = 5q + q$ avec $0 \leqslant q < 5 \Leftrightarrow a = 6q$, $q = 0, 1, 2, 3$, ou 4. C'-à-d : $a = 0, 6, 12, 18$ ou 24. On a $a = 4 \times (3r) + r$ avec $r = 0, 1, 2, 3$ *equi* $a = 13r$ avec $r = 0, 1, 2, 3$ *c-à-d* $a = 0, 13, 26$ ou 39.

1.4 Écriture en base b
Soit $b \geqslant 2$.

a) Démontrons par récurrence sur $n \geqslant 0$ que :
$$(H_n) \ \exists\, !r \geqslant 0, (a_k)_{0 \leqslant k \leqslant r},\ a_r \neq 0, \forall\, k,\ a_k \in \{0, 1, ..., b-1\} \text{ et } n = a_0 + a_1 b + ... + a_r b^r \ .$$
C'est évident sit $0 \leqslant n \leqslant b - 1$ car alors $r = 0$ et $n = a_0$.
Supposons que H_k est vrai pour $0 \leqslant k \leqslant n - 1$ où $n \geqslant b$. Démontrons H_n.
Faisons la division euclidienne de n par b :
$$n = bq + \rho$$
pour un unique $\rho \in \{0, ..., b-1\}$. Comme $b \geqslant 2$, et $n \geqslant b$, on a $0 \leqslant q = \frac{n-\rho}{b} \leqslant \frac{n}{2} < n$.
On peut appliquer l'hypothèse de récurrence à q :
$$\exists\, !s \geqslant 0, (\alpha_k)_{0 \leqslant k \leqslant s},\ \alpha_s \neq 0,\ \forall\, k,\ \alpha_k \in \{0, ..., b-1\},\ q = \alpha_0 + \alpha_1 b + ... + \alpha_s b^s \ .$$

On a bien :

$$n = bq + \rho = \rho + b\alpha_0 + ... + b^{s+1}\alpha_s$$

il suffit donc de poser $a_0 = \rho$, $r = s+1$, $a_i = \alpha_{i-1}$ si $1 \leqslant i \leqslant s+1$.
Pour l'unicité :

$$n = a'_0 + a'_1 b + ... + a'_{r'} b^{r'}$$

avec $r' \geqslant 0$ et $a'i \in \{0, ..., b-1\}$ et $a'_{r'} \neq 0 \Rightarrow a'_0$ est le reste de la division euclidienne de n par b. Donc $a'_0 = \rho$. Et :

$$a'_1 b + ... + a'_{r'} b^{r'} = bq \Rightarrow q = a'_1 + ... + a'_{r'} b^{r'-1}$$

$$\Rightarrow r' - 1 = s,\ a'_1 = \alpha_0, ..., a'_{r'} = a_s$$

par hypothèse de récurrence (appliquée à q).
Cela achève la récurrence.

b) Si $b = 10$, $n = a_0 + a_1 10 + ... + 10^r a_r = a_0 \bmod 10$.
Donc $n = a_0 \bmod 5$ et $n = a_0 \bmod 2$ car $2|10$ et $5|10$.
Donc $2|n \Leftrightarrow n = 0 \bmod 2 \Leftrightarrow a_0 = 0 \bmod 2 \Leftrightarrow 2|n$.
De même pour 5.

c) Si $n = a_0 + a_1 b + ... + a_r b^r$ et $S(n) = a_0 + ... + a_r$, alors

$$n - S(n) = a_1(b-1) + ... + a_r(b^r - 1)\ .$$

Or $\forall\, k \geqslant 1$, $b^k - 1 = (b-1)(b^{k-1} + ... + 1) \Rightarrow b - 1 | b^k - 1$. Donc $b - 1 | n - S(n)$.

d) Si $b = 10$, on trouve : $b - 1 = 9$ donc $n = S(n) \bmod 9$. Donc

$$9|n \Leftrightarrow n = 0 \bmod 9 \Leftrightarrow S(n) = 0 \bmod 9 \Leftrightarrow 9|S(n)\ .$$

e) Comme $10 = -1 \bmod 11$, on a $n = a_0 + a_1 10 + ... + a_r 10^r = a_0 - a_1 + ... + (-1)^r a_r \bmod 11$. Donc

$$11|n \Leftrightarrow 11|a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + ... + (-1)^r a_r\ .$$

f) En base 2, $2 = \overline{10} = 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0$.