2.1.

lemme de Gauss : si $a \mid bc$ et si $a \wedge b = 1$ alors $a \mid c$ $\square$

1) $33 \mid n$ et $77 \mid n$

Montrer $231 \mid n$.

$33 = 3 \times 11$ $\quad$ $77 = 7 \times 11$ $\quad$ donc $\text{ppcm}(33, 77) = 3 \times 11 \times 7 = 231$

si $a = p_1^{\alpha_1} \cdots p_N^{\alpha_N}$ et $b = p_1^{\beta_1} \cdots p_N^{\beta_N}$ où p_i premiers $\neq$
$\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{N}$

alors $\text{ppcm}(a, b) = p_1^{\gamma_1} \cdots p_N^{\gamma_N}$ où $\gamma_i = \max\{\alpha_i ; \beta_i\}$

ex : $33 = 3 \times 7^0 \times 11$ $\quad$ $77 = 3^0 \times 7 \times 11$

$\text{pgcd}(a, b) = p_1^{\delta_1} \cdots p_N^{\delta_N}$ où $\delta_i = \min\{\alpha_i ; \beta_i\}$

si $33 \mid n$ et $77 \mid n$, alors $231 \mid n$.

Définition : si $a, b \in \mathbb{Z}$, alors $a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z} = p\mathbb{Z}$ pour un certain entier p.

on dit que p est « le » ppcm de a et b

Propriétés : $a \mid \ell$ et $b \mid \ell \iff p \mid \ell$

Avec le lemme de Gauss : $33 \mid n \implies n = 33n'$ pour un entier n'

et $77 \mid n \iff 77 \mid 33n' \implies 7 \mid 3n'$
(simplifier par 11)

Or $7 \wedge 3 = 1$ donc d'après le lemme de Gauss $7 \mid n'$

donc $n' = 7n''$ pour un $n'' \in \mathbb{N}$.

donc $n = 33n' = 231n'' \implies 231 \mid n$.

2) $120 \mid n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)$ $(\forall n \in \mathbb{N})$

$120 = 5!$ $\quad \dfrac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{5!} = \binom{n+4}{5} \in \mathbb{Z} \rightarrow 5! \mid n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)$

$120 = 2^3 \times 3 \times 5$

$3 \mid n(n+1)(n+2)$ car $n, n+1$ ou $n+2 = 0 \bmod 3$

de même $5 \mid n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)$

$n = 0 \mod 4 \Rightarrow 2 \mid n+2 \Rightarrow 8 \mid n(n+2)$

$n = 1 \mod 4 \Rightarrow 2 \mid n+1$ et $4 \mid n+3 \Rightarrow 8 \mid (n+1)(n+3)$

$n = 2 \mod 4$ ⋮

ou $n = 3 \mod 4$ ⋮

donc dans tous les cas : $8 \mid n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)$

$3, 5, 8$ premiers entre eux donc $\mathrm{ppcm}(3, 5, 8) = 120 \mid n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)$

Q.2.

Supposons $x, y \in \mathbb{N}$. Choisissons $\mathrm{pgcd}(x,y) = d$ et $\mathrm{ppcm}(x,y) = m \in \mathbb{N}$

Montrons $xy = dm$.

Cas où $d=1$: $x \mid m$ donc $m = xm'$ pour un $m' \in \mathbb{N}$.

Or $y \mid m \Rightarrow y \mid xm' \xrightarrow{\text{(Gauss)}} y \mid m'$

donc $m' = ym''$ pour un $m'' \in \mathbb{N}$

donc $m = xm' = xym'' \Rightarrow xy \mid m$

Or $x \mid xy$ et $y \mid xy$ donc toujours $m \mid xy$

donc $\boxed{m = xy}$

Cas général : $d = \text{pgcd}(x,y) \Rightarrow x' = \frac{x}{d}$; $y' = \frac{y}{d}$ entiers premiers entre eux.

d'après le cas précédent $\text{ppcm}\left(\frac{x}{d}, \frac{y}{d}\right) = \frac{xy}{d^2}$ | $\text{ppcm}(x', y') = x'y'$

$$\text{ppcm}(x,y) = \text{ppcm}\left(d\frac{x}{d}, d\frac{y}{d}\right) = d\,\text{ppcm}\left(\frac{x}{d}, \frac{y}{d}\right) = \frac{xy}{d}$$

$\text{ppcm}(dx', dy') = d\,\text{ppcm}(x', y')$

donc $d\,\text{ppcm}(x,y) = xy$.

2.3. $\begin{cases} a^2 + b^2 = 5409 \\ \text{ppcm}(a,b) = 360 \end{cases}$

Montrer $3 | a$ et $3 | b$

Dans $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ $\quad a^2 + b^2 = 5409 = 0 \mod 3$

$a = \pm 1$ ou $0 \mod 3 \Rightarrow a^2 = 1$ ou $0 \mod 3$

$b^2 = 1$ ou $0 \mod 3$

$\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} = \{-1 \mod 3, 0 \mod 3, 1 \mod 3\}$

Rappel des opérations dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$:

$k \mod n = k + n\mathbb{Z}$

$$(k + n\mathbb{Z}) + (k' + n\mathbb{Z}) = (k + k') + n\mathbb{Z}$$

$$k_1 + n\mathbb{Z} = k_2 + n\mathbb{Z} \Leftrightarrow n | k_1 - k_2$$

Ex : $0 \mod 2 = \{\text{entiers pairs}\}$

$1 \mod 2 = \{\text{entiers impairs}\}$

$$a^2+b^2 = 0 \bmod 3 \implies a^2 = b^2 = 0 \bmod 3$$

$$\implies a = b = 0 \bmod 3 \qquad \text{(lemme de Gauss)}$$

$a = 3c$, $b = 3d$ $\quad c, d \in \mathbb{N}$.

Simplifier.

$$\begin{cases} c^2+d^2 = \dfrac{5409}{9} = 601 \\ \text{ppcm}(c,d) = \dfrac{360}{3} = 120 \end{cases}$$

Supposons $c \leq d$.

$$\text{ppcm}(\underset{a}{\underset{\uparrow}{3c}}, \underset{b}{\underset{\uparrow}{3d}}) = 3\,\text{ppcm}(c,d)$$

$c^2+d^2 = 601 \implies d \leq \sqrt{601} \implies d < 25$ car $25^2 = 625$

$$\implies d \leq 24.$$

Or $d \mid \underset{2^3\times 3\times 5}{\underset{\parallel}{120}} \implies d = 2^\alpha 3^\beta 5^\gamma$ où $\alpha = 0,1,2$ ou 3, $\beta = 0$ ou 1, $\gamma = 0$ ou 1

$$\implies d = 2^3\times 3,\ \cancel{2^3},\ 3\times 5,\ 2^2\times 3,\ 2^2\times 5.$$

$c \leq d$ si $d = 8$, alors $15 \mid c$ absurde

comme $\text{ppcm}(c,d) = 120$, $120 = \text{ppcm}(8, c) \Rightarrow 15 \mid 8c \Rightarrow 15 \mid c$

de même on élimine les autres cas $d = 10$, $d = 6$, etc.

Si $d = 24$ $\quad c^2 + d^2 = 601 \Rightarrow c^2 = 601 - 24^2 \Rightarrow c = 5$

on a bien $\text{ppcm}(5, 24) = 120$.

Si $d = 20$, $\quad c^2 = 201$ impossible

Si $d = 15$, $\quad c^2 = 601 - 15^2 = 601 - 225 = 376$ impossible

Si $d = 12$, $\quad c^2 = 601 - 144 = 457$ impossible.

donc $\begin{cases} a^2 + b^2 = 5409 \\ \text{ppcm}(a, b) = 360 \end{cases} \Longleftrightarrow$ $a = 15$, $b = 72$ ou $a = 72$, $b = 75$