Contrôle partiel du 5 novembre 2021
corrigé

Exercice 1

Soient $k, n \in \mathbb{N}$.

a) Rappeler le nombre de mots avec n lettres formés de k lettres A et $n-k$ lettres B. $\binom{n}{k}$.

b) Déterminer le nombre de mots avec n lettres formés de k lettres A et $n-k$ lettres B et qui commencent par la lettre A. $\binom{n-1}{k-1}$ car le mot est déterminé par les $n-1$ lettres après le A.En déduire la formule :

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} \ .$$

L'ensemble des mots de n lettres avec k lettres A et $n-k$ lettres B est la réunion disjointe de ceux qui commencent par A (il y en a $\binom{n-1}{k-1}$) et de ceux qui commencent par B (il y en a $\binom{n-1}{k}$).

Exercice 2 Pour tous entiers $m, n \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{I}_{m,n}$ l'ensemble des applications injectives de l'ensemble $[\![1, m]\!]$ vers l'ensemble $[\![1, n]\!]$ et $\mathcal{S}_{m,n}$ l'ensemble des applications surjectives de l'ensemble $[\![1, m]\!]$ sur l'ensemble $[\![1, n]\!]$.

a) Déterminer $|\mathcal{I}_{3,n}|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. pour une fonction injective définie sur $\{1, 2, 3\}$, il y a n possibilités pour $f(1)$ puis $n-1$ pour $f(2)$ puis $n-2$ pour $f(3)$. Donc

$$|\mathcal{I}_{3,n}| = n(n-1)(n-2) \ .$$

b) Soient A, B deux parties finies d'un ensemble E quelconque. Justifier la formule :

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| \ .$$

$A \cup B = A \setminus A \cap B \cup B \setminus A \cap B \cup A \cap B$ et cette réunion est disjointe donc

$$|A \cup B| = |A| - |A \cap B| + |B| - |A \cap B| + |A \cap B|$$

d'où la formule. En déduire pour une partie finie C de E, une formule pour $|A \cup B \cup C|$ en fonction de :

$$|A|, |B|, |C|, |A \cap B|, |B \cap C|, |C \cap A|, \text{ et } |A \cap B \cap C| \ .$$

$$\begin{aligned} |A \cup B \cup C| &= |(A \cup B) \cup C| = |A \cup B| + |C| - |(A \cup B) \cap C| = |A| + |B| - |A \cap B| + |C| - |(A \cap C) \cup (B \cap C)| \\ &= |A| + |B| - |A \cap B| + |C| - (|A \cap C| + |B \cap C| - |A \cap B \cap C|) \\ &= |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |A \cap C| + |A \cap B \cap C| \ . \end{aligned}$$

c) Soit $m \in \mathbb{N}$. On note E l'ensemble des applications $f : [\![1, m]\!] \to [\![1, 3]\!]$. On note

$$A = \{f \in E : Imf \subseteq \{1,2\}\},\ B = \{f \in E : Imf \subseteq \{2,3\}\},\ C = \{f \in E : Imf \subseteq \{1,3\}\}.$$

Dans ce cas, déterminer

$$|A|, |B|, |C|, |A \cap B|, |B \cap C|, |C \cap A|,\ |A \cap B \cap C| \text{ et } |E|\ .$$

Comme $A = \{1,2\}^{[\![1,m]\!]}$, $|A| = 2^m$. De même $|B| = |C| = 2^m$. L'intersection $A \cap B$ possède un seul élément, la fonction constante égale à2. Donc $|A \cap B| = 1$. De même, $|B \cap C| = |A \cap C| = 1$.
On a $A \cap B \cap C = \varnothing$ donc $|A \cap B \cap C| = 0$. On a aussi $|E| = 3^m$.

d) En déduire $|\mathcal{S}_{m,3}|$ pour tout $m \in \mathbb{N}$. On a $\mathcal{S}_{m,3} = E \setminus (A \cup B \cup C)$. Donc

$$|\mathcal{S}_{m,3}| = 3^m - |A \cup B \cup C|$$

$$= 3^m - (|A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |A \cap C| + |A \cap B \cap C|)$$

$$= 3^m - (2^m + 2^m + 2^m - 1 - 1 - 1 + 0)$$

$$= 3^m - 3.2^m + 3$$

Exercice 3

a) Rappeler la définition d'un ensemble dénombrable et montrer que l'ensemble $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ n'est pas dénombrable.
Un ensemble est dénombrable s'il est en bijection avec $\mathbb{N}$.
Si $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ était dénombrable, on pourrait trouver une bijection $\mathbb{N} \to \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, $n \mapsto x_n$. Pour tous $k, n \in \mathbb{N}$, on notera $x_n[k]$ le $k-$ième terme de la suite x_n.
Considérons alors la suite $a_n = \begin{cases} 0 \text{ si } x_n[n] = 1 \\ 1 \text{ si } x_n[n] = 0 \end{cases}$. Il est clair que la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dans $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ mais n'est pas de la forme x_l, pour aucun $l \in \mathbb{N}$. En effet si on avait $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} = x_l$, on aurait $a_l = x_l[l]$ *absurde !*

b) Montrer que l'application

$$\mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ (m,n) \mapsto 2^m(2n+1) - 1$$

est bijective.
L'application est bien définie car si $m, n \in \mathbb{N}$, alors $2^m(2n+1) \geqslant 1 \Rightarrow 2^m(2n+1) - 1 \in \mathbb{N}$.

Injectivité : si $2^m(2n+1)-1 = 2^p(2q+1)-1$, alors

$$2^m(2n+1) = 2^p(2q+1)$$

par unicité de la décomposition en facteurs premiers, comme $2n+1$ et $2q+1$ sont impairs et n'ont pas de 2 dans leur factorisation en nombres premiers, $m = p$. En simplifiant par $2^m = 2^p$, on trouve $2n+1 = 2q+1$ *i.e.* $n = q$.
Surjectivité : soit $N \in \mathbb{N}$. Alors $N+1$ est un entier $\geqslant 1$. Soit 2^m, $m \in \mathbb{N}$, la plus grande puissance de 2 qui divise $N+1$. Alors

$$N+1 = 2^m l$$

où l est un entier impair. Donc $l = 2n+1$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Donc $N+1 = 2^m(2n+1) \Leftrightarrow N = 2^m(2n+1)-1$.

c) En déduire une bijection $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.
Soit $\Phi : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $(m,n) \mapsto 2^m(2n+1)-1$.
comme Φ est bijective, l'application

$$\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N},\ (m,n,p) \mapsto (\Phi(m,n),p)$$

est aussi bijective. On en déduit une bijection *en composant avec* Φ :

$$\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ (m,n,p) \mapsto \Phi(\Phi(m,n),p)) = 2^{2^m(2n+1)-1}(2p+1)\ .$$

Exercice 4 Montrer que 2021 et 2030 sont premiers entre eux et trouver deux entiers $u, v \in \mathbb{Z}$ tels que :

$$2021u + 2030v = 1\ .$$

Donner l'inverse de 2021 dans $\mathbb{Z}/2030\mathbb{Z}$ et l'inverse de 2030 dans $\mathbb{Z}/2021\mathbb{Z}$.
Utilisons l'algorithme d'Euclide.

$$2030 = 2021 + 9$$

$$2021 = 224.9 + 5$$

$$9 = 5 + 4$$

$$5 = 4 + 1$$

$$4 = 4.1 + 0$$

Le pgcd est le dernier reste non nul c'est-à-dire 1.

On a en lisant de bas en haut :

$$1 = 5-4 = 5-(9-5) = 2.5-9 = 2.(2021-224.9)-9 = 2.2021-449.9 = 2.2021-449.(2030-2021)$$

on peut donc prendre $u = 451$ et $v = -449$.

On a alors :

$$2021.451 = 1 \bmod 2030 \Rightarrow \overline{2021}^{-1} = \overline{451}$$

dans $\mathbb{Z}/2030\mathbb{Z}$. On a de même :

$$\overline{2030}^{-1} = \overline{-449}$$

dans $\mathbb{Z}/2021\mathbb{Z}$.

Exercice 5

Résoudre dans $\mathbb{Z}$ le système

$$\begin{cases} x & = & 1\,[15] \\ x & = & 2\,[14] \\ x & = & 4\,[13] \end{cases}.$$

D'après la première ligne, $x = 1 + 15k$, $k \in \mathbb{Z}$. Or

$$1 + 15k = 2[14] \Leftrightarrow 1 + k = 2[14] \Leftrightarrow k = 1[14]$$

Donc $x = 1 + 15(1 + 14l)$, $l \in \mathbb{Z}$. On *reporte dans la dernière ligne* :

$$1 + 15(1 + 14l) = 4[13] \Leftrightarrow 1 + 2(1 + l) = 4[13] \Leftrightarrow 2l = 1[13]$$

$$\Leftrightarrow l = 7[13]$$

en miltipliant par 7 *qui est l'inverse de* $2 \bmod 13$.

Donc le système a pour solutions $x = 1 + 15(1 + 14(7 + 13m))$

$$= 1486 + 2730m\,,$$

$m \in \mathbb{Z}$

Exercice 6 Déterminer le reste de la division euclidienne de 2^{2021} par 19.

Il s'agit de trouver le représentant de $2^{2021} \bmod 19$ dans $[\![0, 18]\!]$.

Or, comme 19 est premier, d'après le petit théorème de Fermat, $2^{18} = 1 \bmod 19$.

Or, $2021 = 112.18 + 5$. Donc

$$2^{2021} = 2^{18.112+5} = (2^{18})^{112}.2^5$$

$$= 2^5 \bmod 19 = 32 \bmod 19$$
$$= 13 \bmod 19$$

d'où le reste de la division euclidienne de 2^{2021} par 19 est

$$\boxed{13}\ .$$