Université Lyon I
Licence de mathématiques – L3, parcours « enseignement »
Algèbre et mathématiques discrètes
Contrôle partiel du 5 novembre 2021

L'énoncé est sur deux pages ! Le barème est indicatif. Ni documents, ni calculatrices, ni téléphones, ni ordinateurs ne sont autorisés.

Exercice 1
Soient $k, n \in \mathbb{N}$.

a) Rappeler le nombre de mots avec n lettres formés de k lettres A et $n-k$ lettres B. **0,5pt**

b) Déterminer le nombre de mots avec n lettres formés de k lettres A et $n-k$ lettres B et qui commencent par la lettre A. En déduire la formule :

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} \; .$$

1,5pt

Exercice 2 Pour tous entiers $m, n \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{I}_{m,n}$ l'ensemble des applications injectives de l'ensemble $[\![1, m]\!]$ vers l'ensemble $[\![1, n]\!]$ et $\mathcal{S}_{m,n}$ l'ensemble des applications surjectives de l'ensemble $[\![1, m]\!]$ sur l'ensemble $[\![1, n]\!]$.

a) Déterminer $|\mathcal{I}_{3,n}|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. **1pt**

b) Soient A, B deux parties finies d'un ensemble E quelconque. Justifier la formule : $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$. **1pt**
En déduire pour une partie finie C de E, une formule pour $|A \cup B \cup C|$ en fonction de :

$$|A|, |B|, |C|, |A \cap B|, |B \cap C|, |C \cap A|, \text{ et } |A \cap B \cap C| \; .$$

2pt

c) Soit $m \in \mathbb{N}$. On note E l'ensemble des applications $f : [\![1, m]\!] \to [\![1, 3]\!]$. On note

$$A = \{f \in E : Imf \subseteq \{1, 2\}\},\ B = \{f \in E : Imf \subseteq \{2, 3\}\},\ C = \{f \in E : Imf \subseteq \{1, 3\}\}.$$

Dans ce cas, déterminer

$$|A|, |B|, |C|, |A \cap B|, |B \cap C|, |C \cap A|,\ |A \cap B \cap C| \text{ et } |E| \; .$$

2pt

d) En déduire $|\mathcal{S}_{m,3}|$ pour tout $m \in \mathbb{N}$. **2pt**

Exercice 3

a) Rappeler la définition d'un ensemble dénombrable et montrer que l'ensemble $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ n'est pas dénombrable. **3pt**

b) Montrer que l'application

$$\mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ (m,n) \mapsto 2^m(2n+1) - 1$$

est bijective. **2pt**

c) En déduire une bijection $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. **2pt**

Exercice 4 Montrer que 2021 et 2030 sont premiers entre eux et trouver deux entiers $u, v \in \mathbb{Z}$ tels que :

$$2021u + 2030v = 1\ .$$

2pt

Donner l'inverse de 2021 dans $\mathbb{Z}/2030\mathbb{Z}$ et l'inverse de 2030 dans $\mathbb{Z}/2021\mathbb{Z}$. **1pt**

Exercice 5

Résoudre dans $\mathbb{Z}$ le système

$$\begin{cases} x &= 1\,[15] \\ x &= 2\,[14] \\ x &= 4\,[13]\ . \end{cases}$$

4pt

Exercice 6 Déterminer le reste de la division euclidienne de 2^{2021} par 19. **3pt**