Exo 2.2.

parties non vides de $\{0,1,\dots,n\}$

$$2^{n+1}-1=\sum_{k=0}^{n}\left|\{\emptyset\neq A\subset\{0,\dots,n\}\mid \max A=k\}\right|$$

Si E de cardinal n, alors $|\mathcal{P}(E)|=2^n$

ex : $E=\{1,2,3\}$ $\mathcal{P}(E)=\{\emptyset,\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{1,2,3\}\}$

$$\mathcal{P}(E)\xrightarrow{1:1}\{0,1\}^E$$

bijection

$$A\longmapsto \chi_A : E\to\{0,1\}$$
$$x\longmapsto\begin{cases}1 & \text{si } x\in A\\ 0 & \text{si } x\notin A\end{cases}$$

Or $\left|\{\emptyset\subset A\subset\{0,1,\dots,n\}\mid \max A=k\}\right|$

$=\left|\{A'\subset\{0,1,\dots,k-1\}\}\right|=2^k$

Voici la bijection

$A\longmapsto A\setminus\{k\}$

$A'\cup\{k\}\longleftarrow A'$

$\{A\subset\{1,\dots,n\}\mid \max A=k\}\xrightarrow{1:1}\{A'\subset\{0,1,\dots,k-1\}\}$

donc $2^{n+1}-1=\sum_{k=0}^{n}2^k$

Deuxième identité :

Soit $E=\{A\subset\{1,\dots,n\}\mid |A^c|\geq 2\}$

$|E|=2^n-1-n$

Soit $E_k=\{A\in E\mid$ « l'avant-dernier élément de A^c » $=k\}$ $(0\leq k\leq n)$

$E=\bigcup_{k=0}^{n-1}E_k$ disjointe

$$|E_k|=(n-k)\times 2^{k-1}\Rightarrow 2^n-1-n=\sum_{k=0}^{n-1}(n-k)2^{k-1}$$

Ex :

Si $|B| \geq 2$ et $B \subset \{1, \dots, n\}$

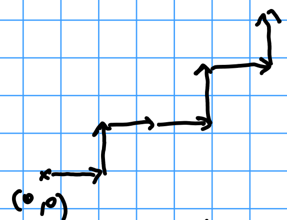
l'avant-dernier élément de $B = \max(B \setminus \{\max B\})$

Par ex. si $B = \{1, 3, 5, \underline{7}, 11\}$, $\max B = 11$, $B \setminus \{\max B\} = \{1, 3, 5, 7\}$

donc $\underline{\max}\,(B \setminus \{\max B\}) = 7$.

Nombre de chemins de longueur n (partant de $(0,0)$)

avec k pas « est » $= \binom{n}{k}$



correspond :

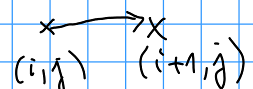
ENEENEN

$=$ nombre de mots à n lettres parmi E, N avec exactement k fois la lettre E

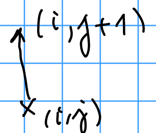
définition : Un chemin nord-est (ou NE) est une suite de segments

$[A_0 A_1], [A_1 A_2], \dots, [A_{n-1} A_n]$

où $A_i \in \mathbb{N}^2$ et $[A_i, A_{i+1}]$ est de la forme

– 

type « est »

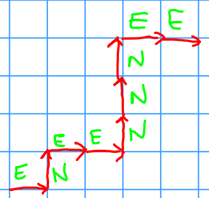
ou – 

type « nord »

$n =$ la longueur du chemin ; $[A_i, A_{i+1}]$, $0 \leq i \leq n-1$, sont les « étapes » du chemin

Rappel : il y a une bijection entre les chemins de longueur n
et les mots à n lettres formé des lettres E et N

Par exemple, le chemin :



correspond au mot ENEE NNNEE

Exo 2.4

Soient $k \leq n$ entiers.

0) Il y a une bijection

$$\left\{ \text{chemins de longueur } n \overbrace{\ }^{\text{issus de } (0,0)} \text{ qui ont } k \text{ étapes « est »} \right\} \overset{1:1}{\longleftrightarrow} \left\{ \text{mots de longueur } n \text{ avec } k \text{ fois la lettre « E »} \right\}$$

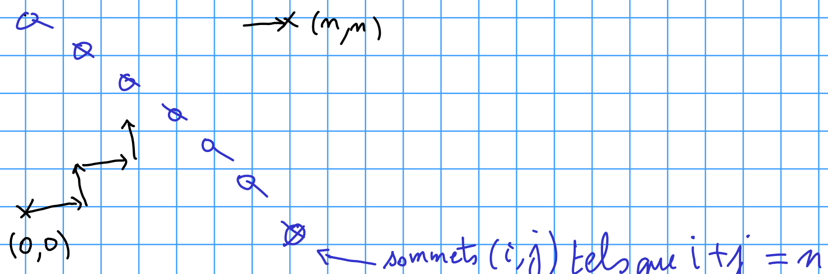
Donc $\binom{n}{k}$ est le nombre de chemin de longueur n avec k étapes « est ».

1) $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$ = nombre de chemins de longueur n avec une $1^{\text{ère}}$ étape « nord » et k étapes « est » parmi les $n-1$ étapes suivantes

$\binom{n}{k}$ = nombre de chemins de longueur n avec k étapes « est »

$\binom{n-1}{k-1}$ = nombre de chemins de longueur n avec une $1^{\text{ère}}$ étape « est » et $k-1$ étapes « est » parmi les $n-1$ étapes suivantes

2)



— · —

$\binom{2n}{n}$ = nombre de chemins NE de $(0,0)$ à (n,n)

$\binom{n}{k}$ = nombre de chemins NE de $(0,0)$ à $(k, n-k)$

$\binom{n}{k}$ = nombre de chemins NE de $(k, n-k)$ à (n,n)

Or chaque chemin de $(0,0)$ à (n,n) se décompose en la mise bout à bout

- d'un chemin de $(0,0)$ à $(k, n-k)$

et - d'un chemin de $(k, n-k)$ à (n,n)

d'où $\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$

3) $\sum_{i=0}^{n} \binom{x+i}{i} = \binom{x+n+1}{n}$

- À droite : nombre de chemins de longueur $x+n+1$ à n étapes «est»
- À gauche : $\binom{x+i}{i}$ = nombre de chemins de longueur $x+n+1$ à n étapes «est»

qui se terminent par $\underbrace{x \to x \to x \cdots x \to}_{n+1-i \text{ étapes «est»}}$

4) Soit $\mathcal{E} = \Big\{ (e, C) \;\Big|\;$ e est une étape «est» $[A_i, A_{i+1}]$, C est un chemin de longueur n qui contient l'étape $[A_i, A_{i+1}]$ $\Big\}$

Comptons $|\mathcal{E}|$ de 2 façon.

$$|\mathcal{E}| = \sum_{C \text{ chemin de longueur } n} \left|\{e \text{ étape} \mid (e,C) \in \mathcal{E}\}\right|$$

On décompose suivant le nombre d'étapes «est» :

$$|\mathcal{E}| = \sum_k \sum_{\substack{C \text{ chemin de longueur } n \\ \text{avec } k \text{ étapes «est»}}} \underbrace{\left|\{e \text{ étape} \mid (e,C) \in \mathcal{E}\}\right|}_{= k}$$

Or, il y a $\binom{n}{k}$ chemins avec k étapes «est»

donc $|\mathcal{E}| = \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k}$

On peut aussi compter : $|\mathcal{E}| = \sum_{e \text{ étape}} \left|\{C \text{ chemin de longueur } n \text{ qui passe par } e\}\right|$

Or compter le nombre de chemins de longueur n qui passent par une étape e donnée revient à compter le nombre de mots de n lettres qui ont un E dans une certaine position.

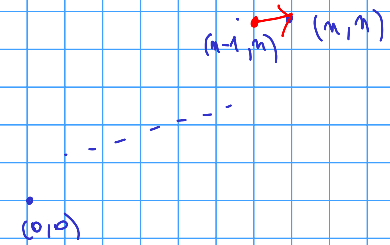
Cela donne 2^{n-1} autres choix pour les autres positions.

Donc $|\mathcal{E}| = \sum_e 2^{n-1}$

$= 2^{n-1} \times n$ (car il y a n positions possibles dans un mot de n lettres)

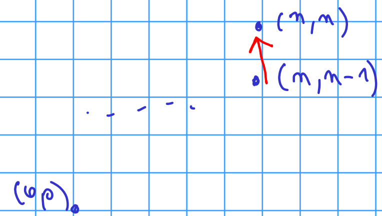
5. Les chemins de $(0,0)$ à (n,n) se décomposent en deux types:

– ceux qui se terminent par



Cela fait $\binom{2n-1}{n-1}$ chemins

– ceux qui se terminent par



Cela fait $\binom{2n-1}{n}$ chemins

donc $\binom{2n}{n} = 2\binom{2n-1}{n}$

6. $\boxed{\text{Si } n>0}$ $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^{n} \binom{n}{k} - \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ impair}}}^{n} \binom{n}{k}$

= nombre de chemins de longueur n avec un nombre pair d'étapes « est »

– nombre de chemins de longueur n avec un nombre impair de chemins « est ».

Notons P_n l'ensemble des chemins de longueur n avec un nombre pair d'étapes « est »

I_n l'ensemble des chemins de longueur n avec un nombre impair d'étapes est.

Or Voici une bijection $\mathcal{P}_n \xrightarrow{i} \mathcal{I}_n$

$c \longmapsto i(c)$

où $i(c)$ est le chemin obtenu en remplaçant la dernière étape de C par $\uparrow$ si C se termine par $\rightarrow$

et par $\rightarrow$ si C se termine par $\uparrow$

(Dans le 1er cas, le nombre d'étapes $\rightarrow$ augmente de $+1$

Dans le 2è cas, le nombre d'étapes $\rightarrow$ diminue de 1)

Il est clair que $i \circ i = \mathrm{Id}$ donc $|\mathcal{P}_n| = |\mathcal{I}_n|$

et $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = |\mathcal{P}_n| - |\mathcal{I}_n| = 0$

7) Soit $S_{i,k} = \{$les chemins de longueur n (issus de $(0,0)$) avec k étapes $\rightarrow$ dont la dernière étape $\rightarrow$ est en position $i\}$

$k \leq i \leq n$

La réunion $\bigcup_{i=k}^{n} S_{ik}$ est disjointe

donc $\binom{n}{k} = \sum_{i=k}^{n} |S_{i,k}|$

Or si la dernière étape $\rightarrow$ d'un chemin est en position i,

il y a exactement $k-1$ étapes $\rightarrow$ parmi les $i-1$ premières étapes et les étapes $i+1, \dots, n$ sont forcément $\uparrow$.

Donc $|S_{i,k}| = \binom{i-1}{k-1}$

donc $\binom{n}{k} = \sum_{i=k}^{n} \binom{i-1}{k-1} = \binom{k-1}{k-1} + \binom{k}{k-1} + \dots + \binom{n-1}{k-1}$

8) Identité de Vandermonde

$\binom{x+y}{n} = |\{$les mots de longueur $x+y$ avec n lettres E$\}|$

$\binom{x}{k}\binom{y}{n-k} = |\{(M_1, M_2)|$ M_1 est un mot de longueur x avec k lettres E

M_2 est un mot de longueur y avec $n-k$ lettres E$\}$

Or si M_1 est un mot de longueur x avec k lettres E

et si M_2 est un mot de longueur y avec $n-k$ lettres E,

le mot M_1M_2 (M_1, M_2 mis bout à bout) est un mot de $x+y$ lettres avec n lettres E.

On obtient ainsi tous les mots de $x+y$ lettres avec n lettres E.

Donc $\binom{x+y}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{x}{k}\binom{y}{n-k}$ $\square$