Fiche de TD 3
Polynômes

Exercice 1 Soient $A, B \in \mathbb{Q}[X]$. Trouver $D = \text{pgcd}(A, B)$ et $Q = \text{ppcm}(A, B)$ pour les polynômes suivants. Trouver aussi à chaque fois $U, V \in \mathbb{Q}[X]$ tels que $AU + BV = D$:

a) $A = X^5 + 1$ et $B = X^3 + X + 1$.

b) $A = X^3 + X^2 + X + 1$ et $B = X^3 + 1$.

Exercice 2 Démontrer que pour tout corps K, l'anneau des polynômes $K[X]$ a une infinité de polynômes unitaires irréductibles.

Exercice 3 Factoriser les polynômes suivants sur $\mathbb{C}$, sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{Q}$:

$$X^4 + 1,\ X^6 + X^3 + 1,\ X^3 - 3X + 1\ .$$

Exercice 4 Trouver un polynôme rationnel de degré 4 qui annule $\sqrt{2} + \sqrt{3}$. Le factoriser sur $\mathbb{R}$.

Exercice 5 Polynômes cyclotomiques

Soit $n \geqslant 1$. On pose

$$\Phi_n(X) = \prod_{\substack{k=1 \\ \text{pgcd}(k,n)=1}}^{n} (X - e^{\frac{2ik\pi}{n}})\ .$$

a) Calculer $\Phi_1(X)$, $\Phi_2(X)$, $\Phi_3(X)$, $\Phi_4(X)$, $\Phi_5(X)$.

b) Montrer que $\prod_{d|n} \Phi_d(X) = X^n - 1$.

c) En déduire par récurrence sur $n \geqslant 1$ que $\Phi_n(X) \in \mathbb{Z}[X]$.

d) En déduire aussi la formule : $\Phi_n(X) = \prod_{d|n}(X^d - 1)^{\mu(\frac{n}{d})}$ où μ est la fonction de Möbius.

Exercice 6 Soient $m, n \in \mathbb{Z}$. Montrer que

$$\text{pgcd}(X^m - 1, X^n - 1) = X^{\text{pgcd}(m,n)} - 1$$

a) en factorisant en produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$;

b) avec l'algorithme d'Euclide.

Exercice 7 Polynômes de Tchebychev

a) On définit par récurrence :

$$T_0(X) = 1,\ T_1(X) = X,\ T_{n+1}(X) = 2XT_n(X) - T_{n-1}(X) \in \mathbb{Z}[X]\ .$$

Calculer $T_2(X)$, $T_3(X)$, $T_4(X)$.

b) Montrer que $\forall\, n \geqslant 0$, $\forall\, t \in \mathbb{R}$, $T_n(\cos t) = \cos nt$ et en déduire les racines de T_n.

c) En déduire que $\forall\, m, n \geqslant 1$, $T_n \circ T_m = T_m \circ T_n$.

d) Montrer que

$$\forall\, n \geqslant 1, \forall\, t \in \mathbb{R},\ \sin nt = U_n(\cos t) \sin t$$

où si $n \geqslant 1$, $U_n(X) = \frac{T_n'(X)}{n}$.

Exercice 8 Critère d'Eisenstein

a) Soient $A, B \in \mathbb{Z}[X]$. Soit p un nombre premier. Montrer que si p divise tous les coefficients du polynôme AB, alors p divise tous les coefficients de A ou bien tous les coefficients de B.

Indication. Vérifier que dans l'anneau $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}[X]$, $\overline{A}\,\overline{B} = 0 \Rightarrow \overline{A}$ ou $\overline{B} = 0$.

b) Si $P \in \mathbb{Z}[X]$, on note $c(P)$ le pgcd de tous les coefficients du polynôme P. En déduire le lemme de Gauss suivant.

Lemme. Soient $A, B \in \mathbb{Z}[X]$. On a $c(AB) = c(A)c(B)$.

c) Soit $P(X) = a_0 + a_1 X + ... + a_n X^n \in \mathbb{Z}[X]$. On suppose qu'il existe un nombre premier p tel que :

(i) $p | a_0, ..., a_{n-1}$;

(ii) $p \nmid a_n$;

(iii) $p^2 \nmid a_0$.

Montrer que P est irréductible sur $\mathbb{Q}$.

d) En déduire pour tout $n \geqslant 1$ un polynôme irréductible sur $\mathbb{Q}$.

Exercice 9 Polynômes à valeurs entières

Si $k \in \mathbb{N}$, on pose

$$\binom{X}{k} = \frac{X(X-1)...(X-k+1)}{k!} \in \mathbb{Q}[X]\ .$$

a) Montrer que

$$\forall\, k \in \mathbb{N},\ \binom{X+1}{k} - \binom{X}{k} = \binom{X}{k-1}\ .$$

b) Montrer que

$$\forall\, k \in \mathbb{N},\ \forall\, n \in \mathbb{Z},\ \binom{X}{k}(n) \in \mathbb{Z}^{\dagger}$$

†. bien que $\binom{X}{k} \notin \mathbb{Z}[X]$ si $k \geqslant 2$.

c) Si $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ est une fonction, on pose

$$\Delta f : n \mapsto f(n+1) - f(n)$$

et on définit par récurrence

$$\forall\, k \geqslant 1,\ \Delta^k f = \Delta\Delta^{k-1} f\ .$$

Soit $d \in \mathbb{N}$. Montrer qu'une fonction $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ est polynomiale de degré d en n si et seulement si $\Delta^{d+1} f = 0$. *Indication. Raisonner par récurrence sur $d \geqslant 0$.*

d) En déduire que $\sum_{k=0}^{n-1} k^d$ est un polynôme de degré $d+1$ en n.

e) Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ une fonction polynomiale de degré d. On suppose que

$$f(0),\ f(1),\ ...,\ f(d) \in \mathbb{Z}\ .$$

Montrer qu'il existe des entiers $c_0, ..., c_d \in \mathbb{Z}$ tels que

$$f = c_0\binom{X}{0} + ... + c_d\binom{X}{d}\ .$$

En particulier $\forall\, n \in \mathbb{N},\ f(n) \in \mathbb{Z}$.[†] tiny *Indication. Vérifier que* $\forall\, 0 \leqslant k \leqslant d,\ c_k = \Delta^k f(0)$.

f) Trouver les coefficients pour $\sum_{k=0}^{n-1} k^2$ et $\sum_{k=0}^{n-1} k^3$. En déduire :

$$\sum_{k=0}^{n-1} k^2 = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6},\ \sum_{k=0}^{n-1} k^3 = \binom{n}{2}^2\ .$$

g) On suppose que f est un polynôme réel ou complexe. On suppose que

$$\forall\, n >> 0,\ f(n) \in \mathbb{Z}$$

Montrer que $f(n) \in \mathbb{Z}$ pour tout n. *Indication. Raisonner avec $f(X+a)$ où a est un entier assez grand !*

Exercice 10 Méthode de Cardan pour les équations de degré 3

Soient $p, q \in \mathbb{C}$. Soit $P(X) = X^3 + pX + q \in \mathbb{C}[X]$.

a) Vérifier que si u, v vérifient $(*)$ $\left\{\begin{array}{rcl} u^3+v^3 & = & -q \\ uv & = & -\frac{p}{3} \end{array}\right.$, alors $x = u+v$ est racine du polynôme P.

b) Soient u, v des racines cubiques :

$$u := \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}},\ v := \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

telles que $uv = -\frac{p}{3}$.

Justifier que c'est possible et déduire de la question précédente que les racines de P sont : $u+v,\ ju+j^2v,\ j^2u+jv$.

†. Et si f est définie et polynomiale sur $\mathbb{Z}$, $\forall\, n \in \mathbb{Z},\ f(n) \in \mathbb{Z}$.

c) **Applications.** En déduire les formules suivantes :

$$\sqrt[3]{\frac{-1+\frac{1}{3}\sqrt{\frac{31}{3}}}{2}}+\sqrt[3]{\frac{-1-\frac{1}{3}\sqrt{\frac{31}{3}}}{2}} \text{ est l'unique racine réelle de } X^3+X+1$$

$$2\cos\frac{2\pi}{9}=\sqrt[3]{-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}}+\sqrt[3]{-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$2\cos\frac{2\pi}{7}=-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\left(\sqrt[3]{\frac{7+21i\sqrt{3}}{2}}+\sqrt[3]{\frac{7-21i\sqrt{3}}{2}}\right)$$

Indication. Utiliser la formule $2\cos(3x)=(2\cos x)^3-3.(2\cos x)$.

Exercice 11 Méthode d'Euler pour les équations de degré 4

Soient $p,q,r\in\mathbb{C}$. Soit $P(X)=X^4+pX^2+qX+r\in\mathbb{C}[X]$.

a) Vérifier que si u,v,w vérifient :

$$(*)\quad\begin{cases} u+v+w=-p/2\\ \sqrt{u}\sqrt{v}\sqrt{w}=-q/8\\ -(u+v+w)^2+4(uv+uw+vw)=-r\end{cases}$$

alors $x=\sqrt{u}+\sqrt{v}+\sqrt{w}$ est racine du polynôme P.

b) En déduire que si u,v,w sont les trois racines du polynôme :

$$T^3+\frac{p}{2}T^2+(\frac{(p/2)^2-r}{4})T-\left(\frac{q}{8}\right)^2$$

et si on choisit des racines carrées telles que

$$\sqrt{u}\sqrt{v}\sqrt{w}=-q/8$$

(justifier que c'est possible), alors les racines du polynôme P sont :

$$\sqrt{u}+\sqrt{v}+\sqrt{w}\,,\ \sqrt{u}-\sqrt{v}-\sqrt{w}\,,\ -\sqrt{u}+\sqrt{v}-\sqrt{w}\,,\ -\sqrt{u}-\sqrt{v}+\sqrt{w}\ .$$

c) **Application.** *Seulement pour les calculateurs motivés :* trouver les racines du polynôme X^4-X-1 .