**Fiche de TD 1**
**Quelques corrections**

## Une bijection $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

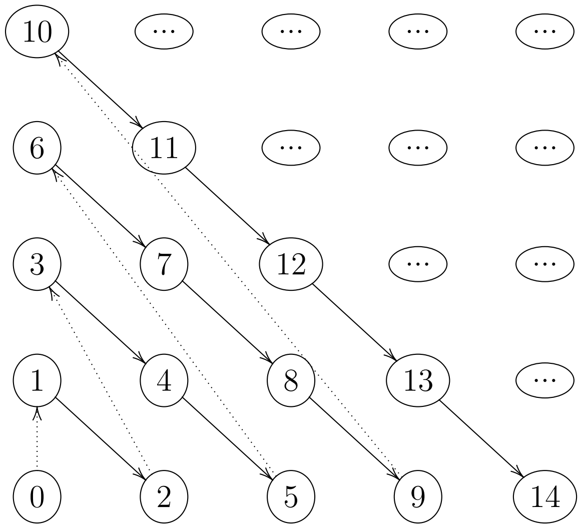


FIGURE 1 – Une numérotation de tous les points de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

On pose

$$\varphi : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ (m, n) \mapsto \frac{(m+n)(m+n)}{2} + m\ .$$

L'application $\varphi$ est une bijection !
Voici une formule pour la réciproque :

$$\forall\, p \in \mathbb{N},$$

$$\psi(p) = \left( p - \frac{\lfloor \frac{-1+\sqrt{1+8p}}{2} \rfloor (\lfloor \frac{-1+\sqrt{1+8p}}{2} \rfloor + 1)}{2}, \frac{\lfloor \frac{-1+\sqrt{1+8p}}{2} \rfloor (\lfloor \frac{-1+\sqrt{1+8p}}{2} \rfloor + 3)}{2} - p \right)$$

où pour tout réel $x$, on note $\lfloor x \rfloor$ le plus grand entier $\leqslant x$.
On peut vérifier que

$$\forall\, p \in \mathbb{N},\ \varphi \circ \psi(p) = p,\ \forall\, m, n \in \mathbb{N},\ \psi \circ \varphi(m, n) = (m, n)\ .$$

*Indication. Soit $k$ le plus grand entier tel que $\frac{k(k+1)}{2} \leqslant p$. Alors comme la fonction $x \mapsto \frac{x(x+1)}{2}$ est croissante sur $\mathbb{R}_{\geqslant 0}$, $k = \lfloor x_0 \rfloor$ où $x_0$ est la solution positive de*

$$\frac{x(x+1)}{2} = p \Leftrightarrow x^2 + x - 2p = 0 \ldots$$

**Une bijection $\mathbb{N}_{>0} \to \mathbb{Q}_{>0}$.**

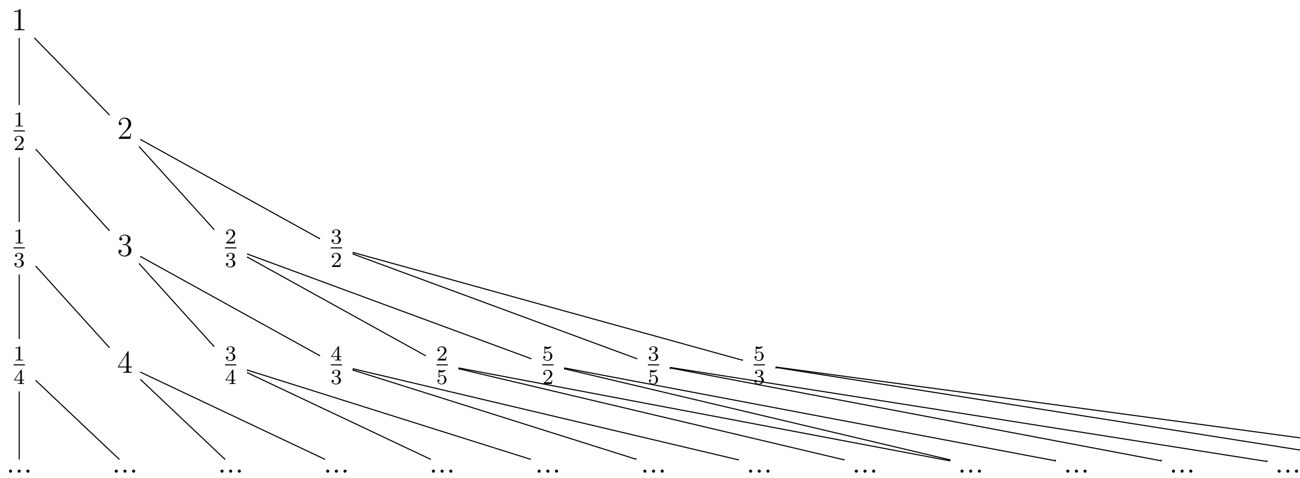


FIGURE 2 – La liste de tous les nombres rationnels $> 0$.

On définit par récurrence une suite de rationnels $> 0$ :

$$R_1 = 1,\ \forall\, n \geqslant 2,\ R_n = \begin{cases} \frac{R_{\frac{n}{2}}}{R_{\frac{n}{2}}+1} & \text{si } n \text{ pair} \\ 1 + \frac{1}{R_{\frac{n-1}{2}}} & \text{si } n \text{ impair} \end{cases}$$

Cela revient à poser

$$\forall\, n \geqslant 1,\ R_{2n} = \frac{R_n}{R_n + 1} \text{ et } R_{2n+1} = 1 + \frac{1}{R_n}\ .$$

L'application

$$\mathbb{N}_{>0} \to \mathbb{Q}_{>0},\ n \mapsto R_n$$

est bijective.

*Démo.* On pose $\varphi(1) = 1$ et

$$\forall\, q \in \mathbb{Q}_{>0},\ \varphi(q) = \begin{cases} 2\varphi(\frac{q}{1-q}) & \text{si } 0 < q < 1 \\ 2\varphi(\frac{1}{q-1}) + 1 & \text{si } q > 1 \end{cases}$$

*Par exemple,*

$$\varphi(\frac{3}{5}) = 2\varphi(\frac{3}{2}),\ \varphi(\frac{3}{2}) = 2\varphi(2) + 1,\ \varphi(2) = 2\varphi(1) + 1 = 3$$

$$\Rightarrow \varphi(\frac{3}{5}) = 14\ .$$

*Nous allons voir que* $\varphi \circ R = \mathrm{Id}_{\mathbb{N}_{>0}}$ *et que* $R \circ \varphi = \mathrm{Id}_{\mathbb{Q}_{>0}}$.

Vérifions que $\varphi$ est bien définie sur $\mathbb{Q}_{>0}$. Nous allons raisonner par récurrence sur $k \in \mathbb{N}_{>0}$ †.

Posons pour tout entier $k > 0$,

$$\mathbb{Q}_k = \left\{ \frac{a}{b}\ :\ a, b \in \mathbb{N}_{>0}, a \wedge b = 1, \max\{a, b\} = k \right\}\ .$$

Par exemple, $\mathbb{Q}_1 = \{1\}$, $\mathbb{Q}_2 = \{2, \frac{1}{2}\}$, $\mathbb{Q}_4 = \{4, \frac{4}{3}, \frac{3}{4}, \frac{1}{4}\}$.

Il est clair que $\mathbb{Q}_{>0} = \cup_{k>0}\mathbb{Q}_k$ et que c'est une réunion disjointe.

Voici l'hypothèse de récurrence numéro $k$ :

$(H_k)$ l'application $\varphi$ est bien définie sur $\cup_{i=1}^{k}\mathbb{Q}_i$ .

$(H_1)$ est vraie car $\varphi(1) = 1$.

Supposons que $(H_k)$ est vraie, $k \geqslant 1$.

Soit $q \in \mathbb{Q}_{k+1}$ *c-à-d*

$$q = \frac{a}{b}$$

où $a, b \in \mathbb{N}_{>0}$, $a \wedge b = 1$, $\max\{a, b\} = k + 1$.

Si $0 < q < 1$, alors $a < b$ donc

$$\max\{a, b\} = b = k + 1$$

et

$$\frac{q}{1-q} = \frac{a}{b-a}$$

†. et non sur $\mathbb{Q}_{>0}$ !

c'est une fraction irréductible et $\max\{a, b-a\} \leqslant k$ car $a < b = k+1$ et $b - a < b = k+1$.

Donc $\frac{q}{1-q} \in \cup_{i=1}^{k} \mathbb{Q}_i$ et $\varphi(q) = 2\varphi(\frac{q}{1-q})$ est bien définie et à valeurs dans $\mathbb{N}_{>0}$.

De même, si $q > 1$, alors $a > b \Rightarrow \max\{a, b\} = a = k+1$ et

$$\frac{1}{q-1} = \frac{b}{a-b}$$

qui est une fraction irréductible avec $\max\{b, a-b\} \leqslant k$ car $b < a = k+1$ et $a - b < a = k+1$.

Donc $\varphi(q) = 2\varphi(\frac{1}{q-1})$ est bien définie.

Cela termine la récurrence.

En particulier $\varphi$ est définie sur $\mathbb{Q}_{>0} = \cup_{k>0} \mathbb{Q}_k$.

Montrons que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}_{>0},\ \varphi(R_n) = n \text{ et } \forall\, q \in \mathbb{Q}_{>0},\ R_{\varphi(q)} = q\ .$$

**Pour la première égalité**, on raisonne par récurrence sur $n \geqslant 1$.

Si $n = 1$, alors $\varphi(R_1) = 1$.

Supposons que $\varphi(R_k) = k$ pour tout $1 \leqslant k \leqslant n-1$ où $n \geqslant 2$.

Alors si $n$ est pair, $n = 2l$ où $1 \leqslant l = \frac{n}{2} \leqslant n-1$. On a :

$$\varphi(R_n) = \varphi(R_{2l}) = \varphi(\frac{R_l}{R_l+1}) = 2\varphi(\frac{\frac{R_l}{R_l+1}}{1 - \frac{R_l}{R_l+1}})$$

$$= 2\varphi(R_l) = 2l = n$$

par hypothèse de récurrence.

Si $n$ est impair, alors $n = 2l+1$ où $1 \leqslant l = \frac{n-1}{2} \leqslant n-1$.

On a :

$$\varphi(R_n) = \varphi(R_{2l+1}) = \varphi(1 + \frac{1}{R_l})$$

$$= 2\varphi(\frac{1}{1 + \frac{1}{R_l} - 1}) + 1$$

$$= 2\varphi(R_l) + 1 = 2l + 1 = n$$

par hypothèse de récurrence.

Cela termine la récurrence.

**Pour la deuxième égalité**, on raissonne par récurrence sur $\varphi(q) \geqslant 1$.

Si $\varphi(q) = 1$, alors $q = 1$ et $R_{\varphi(q)} = R_1 = 1 = q$.

Supposons que $R_{\varphi(r)} = r$ pour tout $r \in \mathbb{Q}_{>0}$ tel que $1 \leqslant \varphi(r) \leqslant n-1$, $n \geqslant 2$.

Supposons que $q \in \mathbb{Q}_{>0}$ et que $\varphi(q) = n$.

Alors on a $q \neq 1$.

**Si $\boldsymbol{0 < q < 1}$**, on a :

$$\varphi(q) = 2\varphi(\frac{q}{1-q})$$

$$\Rightarrow R_{\varphi(q)} = \frac{R_{\varphi(\frac{q}{1-q})}}{R_{\varphi(\frac{q}{1-q})} + 1} \ .$$

Or, $\varphi(\frac{q}{1-q}) = \frac{\varphi(q)}{2} = \frac{n}{2} \leqslant n-1$ donc par hypothèse de récurrence, on a :

$$R_{\varphi(\frac{q}{1-q})} = \frac{q}{1-q}$$

$$\Rightarrow R_{\varphi(q)} = \frac{\frac{q}{1-q}}{\frac{q}{1-q} + 1} = q \ .$$

**Si $\boldsymbol{q > 1}$**, alors on a

$$\varphi(q) = 2\varphi(\frac{1}{q-1}) + 1$$

$$\Rightarrow R_{\varphi(q)} = 1 + \frac{1}{R_{\varphi(\frac{1}{q-1})}} \ .$$

Or, $\varphi(\frac{1}{q-1}) = \frac{\varphi(q)-1}{2} = \frac{n-1}{2} \leqslant n-1$ donc par hypothèse de récurrence, on a :

$$R_{\varphi(\frac{1}{q-1})} = \frac{1}{q-1}$$

$$\Rightarrow R_{\varphi(q)} = 1 + \frac{1}{\frac{1}{q-1}} = q \ .$$

Cela termine la récurrence.