Examen du mardi 11 octobre 2022

Correction.

Exercice 1 a) Donner un exemple d'application injective $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Justifier votre exemple.

Par exemple, l'application $\mathbb{N}\times\mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $(m,n) \mapsto 2^m 3^n$ est injective car 2 et 3 sont des nombres premiers distincts

b) Donner un exemple d'application injective $\mathbb{Q}_{\geqslant 0} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Tout nombre rationnel $r \geqslant 0$ s'écrit $r = \frac{p}{q}$ pour un unique couple $(p,q) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}_{>0}$ d'entiers premiers entre eux. L'application $\mathbb{Q}_{\geqslant 0} \to \mathbb{N}\times\mathbb{N}$, $\frac{p}{q} \mapsto (p,q)$ où $(p,q)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}_{>0}$, $\mathrm{pgcd}(p,q)=1$ est clairement injective

c) Existe-t-il une d'application injective $\mathbb{Q}_{\geqslant 0} \to \mathbb{N}$?

Comme la composée de deux applications injectives est injective, l'application $\mathbb{Q}_{\geqslant 0} \to \mathbb{N}$, $\frac{p}{q} \mapsto 2^p 3^q$ (si $p\in\mathbb{N}$, $q\in\mathbb{N}_{>0}$, $\mathrm{pgcd}(p,q)=1$) est injective.

Exercice 2 a) Résoudre dans $\mathbb{Z}$:

$$\begin{cases} x &= 0\,[2] \\ x &= 1\,[5] \end{cases} \iff x = 6\,[10]$$

et en déduire le dernier chiffre de

$$N = 2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2}}}}} \quad \text{(2022 fois)}$$

en écriture décimale.

Le nombre N est pair donc $N = 0\,[2]$.
$2^2 = 4 = -1\,[5] \Rightarrow 2^4 = 1\,[5] \Rightarrow \forall k\in\mathbb{N}, 2^{4k} = 1^k\,[5] = 1\,[5]$
Comme l'exposant ci-dessus est clairement multiple de 4, on a aussi $N = 1\,[5]$. Donc d'après a), $N = 6\,[10]$.
Le dernier chiffre de N est 6.

b) Résoudre dans $\mathbb{Z}$:

$$(*)\begin{cases} x &= 0\,[4] \\ x &= 1\,[25] \end{cases}$$

On résout $4k = 1\,[25]$, $k\in\mathbb{Z}$.
Si on multiplie par 6 : $24k = 6\,[25]$
$\Leftrightarrow -k = 6\,[25] \Leftrightarrow k = -6\,[25]$
Donc $(*) \Leftrightarrow x = 4(-6+25n)$, $n\in\mathbb{Z}$
$\Leftrightarrow x = -24 + 100n$, $n\in\mathbb{Z}$
$\Leftrightarrow x = -24\,[100] = 76\,[100]$

et en déduire les deux derniers chiffres de

$$N = 2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2}}}}} \quad \text{(2022 fois)}$$

en écriture décimale

Le nombre N est un multiple de 4. Donc $N = 0\,[4]$.
Calculons quelques puissances de 2 modulo 25 : $2^4 = 16$, $2^8 = 16^2 = 256 = 6\,[25] \Rightarrow 2^{10} = 24\,[25] = -1\,[25] \Rightarrow 2^{20} = 1\,[25]$
Donc $2^m = 2^{m'}$ si $m = m'\,[20]$
On sait que $\frac{2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2}}}}}}{2^2} = 0\,[4]$ et $1\,[5] \Leftrightarrow \in -4\,[20] = 16\,[20]$
Donc $N = 2^\ell = 2^{16}\,[100] = (2^8)^2\,[100] = 56^2\,[100] = 3136\,[100] = 36\,[100]$.
Donc les deux derniers chiffres de N sont 36.

Exercice 3 a) Donner la liste des nombres premiers $\leqslant \sqrt{641}$.

Comme $25^2 < 641 < 26^2$ il s'agit de donner la liste des nombres premiers ≤ 25. La voici : 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23.

~~b) Pour chaque nombre premier p dans la liste ci-dessus, trouver au moins un entier n_p tel que~~

~~$pn_p \equiv 1\,[p]$~~

c) Justifier que le nombre 641 est premier.

Si 641 n'est pas premier, alors 641 a au moins deux nombres premiers dans sa factorisation $p_1 \leqslant p_2$
$\Rightarrow 641 \geqslant p_1 p_2 \geqslant p_1^2$
donc il existerait un nombre premier $p_1 \leqslant \sqrt{641}$ qui diviserait 641. C'est impossible car pour les nombres premiers de la liste a), on a : $641 = 1\,[2]$, $641 = 2\,[3]$, $641 = 1\,[5]$, $641 = 4\,[7]$, $641 = 3\,[11]$, $641 = 4\,[13]$, $641 = 12\,[17]$, $641 = 4\,[19]$, $641 = 20\,[23]$
Donc 641 est un nombre premier !

d) Soient x, y des entiers. Soit p un nombre premier. On suppose que dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ on a les égalités :

$$x^4 + y^4 = 0\,[p] \text{ et } x^7 y + 1 = 0\,[p]\ .$$

Montrer que $x^{32} = -1\,[p]$.

e) Montrer que $2^4 + 5^4 = 0\,[641]$. Montrer à l'aide des questions précédentes que $641 \mid 2^{2^5} + 1$.

f) Le nombre $2^{2^5} + 1$ est-il premier ?

Exercice 4 Soit $P(X) = 8X^3 + 4X^2 - 4X - 1$.

a) Calculer $P(1)$ et $P(-1)$. En déduire que P n'a pas de racines dans $\mathbb{Z}$.

b) Soit $r = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ où $a, b \in \mathbb{Z}$, a, b premiers entre eux. Montrer que si $P(r) = 0$, alors $b|8$. En déduire que $2|b$.
On suppose que $b = 2b'$ avec b' entier. Justifier que a, b' sont premiers entre eux et montrer que $b' = \pm 1$.

c) Montrer que P n'a pas de racine dans $\mathbb{Q}$.