Arithmétique et groupes 12 janvier 2023
L3 Parcours Mathématiques pour l'enseignement Contrôle Terminal
Université Claude Bernard (Lyon 1) Durée : **2 heures**

Les documents ne sont pas autorisés. Les réponses, ou les exemples, doivent être soigneusement justifiés. Le barème est indicatif.

Barème : 7+7+10=24

I (7 points)

Soient $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, donc $\alpha + \beta = 1$ et $\alpha\beta = -1$.

1. On pose
$$L_n := \alpha^n + \beta^n \quad (n \in \mathbb{N}).$$
Trouver une relation entre les nombres L_n, L_{n+1}, L_{n+2} pour $n \in \mathbb{N}$.
2. En déduire que L_n est un entier positif et $\text{pgcd}(L_n, L_{n+1}) = 1$ pour $n \in \mathbb{N}$.
3. Vérifier que
$$1 - 11X^5 - X^{10} = (1 - \alpha^5 X^5)(1 - \beta^5 X^5).$$
4. Factoriser $P(X) := X^{10}+11X^5-1$ en produit de polynômes unitaires et irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ et $\mathbb{R}[X]$.

II (7 points)

Soit n un entier ≥ 3. On note A_n le sous-groupe de S_n formé par les permutations paires.

a) Montrer que le produit de deux transpositions distinctes de S_n est un 3-cycle ou un produit de deux 3-cycles.
b) Sachant que le groupe S_n est engendré par l'ensemble des transpositions de $\{1, \ldots, n\}$, montrer que A_n est engendré par l'ensemble des 3-cycles de S_n.
c) Calculer les permutations de A_n :
$$(1\,2\,i)\,(2\,j\,k)\,(1\,2\,i)^{-1} \quad \text{et} \quad (1\,2\,j)\,(1\,2\,k)\,(1\,2\,j)^{-1}$$
où i,j, k sont deux à deux distincts et ≥ 3.
d) Montrer que A_n est engendré par l'ensemble des 3-cycles :
$$(1\,2\,3),\ (1\,2\,4), \ldots, (1\,2\,n).$$

III (10 points)

Le but de cet exercice est de caractériser les triplets (x,y,z) d'entiers ≥ 1 tels que

$$x^2 = y^2 + z^2.$$

Il est facile de vérifier que (5, 3, 4) est un tel triplet.

1. Soit a un entier naturel ≥ 1. Montrer que le reste de la division euclidienne de a^2 par 4 est 0 ou 1.

On suppose dorénavant que (x_0, y_0, z_0) est un triplet d'entiers naturels ≥ 1 tels que $x_0^2 = y_0^2 + z_0^2$.

2. Soit $d = \text{pgcd}(x_0, y_0, z_0)$ et u,v,w des entiers tels que $x_0 = du$, $y = dv$ et $z_0 = dw$. Vérifier que $u^2 = v^2 + w^2$ et que $\text{pgcd}(u,v,w) = 1$.
3. Montrer que parmi les trois nombres u,v,w il n'y a pas deux nombres pairs.
4. Montrer que v et w ne sont pas tous les deux impairs.

On suppose dorénavant que w est un nombre pair, on écrit $w = 2t$ avec t entier ≥ 1.

5. On note $\delta = \text{pgcd}(u - v, u + v)$. Soient α et β tels que $u + v = \delta\alpha$ et $u - v = \delta\beta$.
   i) Déterminer les valeurs correspondantes de u et de v en fonction de δ, α et β.
   ii) Montrer que $\text{pgcd}(u - v, u + v) = 2$. En considérant $u^2 - v^2 = 4t^2$ démontrer que

$$\begin{aligned} u + v &= 2m^2 \\ u - v &= 2n^2 \\ w &= 2mn \end{aligned}$$

   avec m et n premiers entre eux.

6. Démontrer qu'il existe une infinité de triplets (x, y, z) d'entiers ≥ 1 qui vérifient $x^2 = y^2 + z^2$ et $\text{pgcd}(x,y,z) = 1$.