Corrigé de l'examen partiel du mercredi 8 mars 2023

Exercice 1 a) Montrer qu'il existe un unique polynôme $P_3 \in \mathbb{Q}[X]$ de degré $\leqslant 3$ tel que

$$P_3(1) = 1,\ P_3(2) = 5,\ P_3(3) = 14,\ P_3(4) = 30$$

et le trouver. Soit $P_3 = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3$. On a :

$$\begin{cases} a_0 + a_1 + a_2 + a_3 &= 1 \\ a_0 + 2a_1 + 4a_2 + 8a_3 &= 5 \\ a_0 + 3a_1 + 9a_2 + 27a_3 &= 14 \\ a_0 + 4a_1 + 16a_2 + 64a_3 &= 30 \end{cases} \Leftrightarrow a_0 = 0,\ a_1 = \frac{1}{6},\ a_2 = \frac{1}{2},\ a_3 = \frac{1}{3}$$

donc $P_3 = \frac{X}{6} + \frac{X^2}{2} + \frac{X^3}{3}$ convient. C'est unique car si Q_3 convient aussi, alors $P_3 - Q_3$ est de degré $\leqslant 3$ avec au moins 4 racines : $1, 2, 3, 4$ donc $P_3 - Q_3 = 0$.

b) Vérifier que $\forall\, n = 1,\ 2,\ 3,\ P_3(n+1) - P_3(n) = (n+1)^2$. Cette égalité est-elle vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$? *Justifier.*

$P_3(4) - P_3(3) = 30 - 14 = 4^2$, $P_3(3) - P_3(2) = 14 - 5 = 3^2$, $P_3(2) - P_3(1) = 5 - 1 = 2^2$. Comme $P_3(X+1) - P_3(X)$ est de degré le 2 (car les termes en X^3 se simplifient), $P_3(X+1) - P_3(X) - X^2$ est un polynôme de degré $\leqslant 2$ qui s'annulent au moins 3 fois, en $n = 1, 2, 3$. C'est donc le polynôme nul et $\forall\, x \in \mathbb{R},\ P_3(x+1) - P_3(x) = x^2$.

c) Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N},\ P_3(n) = 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2$.

$1^2+2^2+\ldots+n^2 = P_3(n)-P_3(n-1)+P_3(n-1)+P_3(n-2)+\ldots+P_3(1)-P_3(0) = P_3(n) - P_3(0)$. Or, $P_3(0) = 0$ donc $1^2 + \ldots + n^2 = P_3(n) = \frac{n}{6} + \frac{n^2}{2} + \frac{n^3}{3} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Exercice 2 Pour chacune des listes de fonctions suivantes, dire si elle est libre ou liée dans le $\mathbb{R}-$espace vectoriel des fonctions réelles définies sur l'intervalle indiqué.

a) $|x+1|, |x+2|, |x+3|$ sur $\mathbb{R}$;

Si $\forall\, x \in \mathbb{R},\ t_1|x+1| + t_2|x+2| + t_3|x+3| = 0$, alors pour $x = 0, -1, -2$, on a

$$\begin{cases} t_1 + 2t_2 + 3t_3 &= 0 \\ t_2 + 2t_3 &= 0 \\ t_1 + t_3 &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow t_1 = t_2 = t_3 = 0$$

Donc la famille est libre.

b) $(x+1)^2, (x+2)^2, (x+3)^2$ sur $\mathbb{R}$; Si $\forall x \in \mathbb{R}$, $t_1(x+1)^2+t_2(x+2)^2+t_3(x+3)^2 = 0$, alors pour $x = 0, -1, -2$, on a

$$\begin{cases} t_1 + 4t_2 + 9t_3 & = & 0 \\ t_2 + 4t_3 & = & 0 \\ t_1 + t_3 & = & 0 \end{cases} \Leftrightarrow t_1 = t_2 = t_3 = 0$$

Donc la famille est libre.

c) $\cos(x+1), \cos(x+2), \cos(x+3)$ sur $\mathbb{R}$; On a $\cos(x+1) = \cos x \cos 1 - \sin x \sin 1 \in \mathrm{Vect}\{\cos x, \sin x\}$ et de même pour les autres fonctions. Donc $\cos(x+1), \cos(x+2), \cos(x+3)$ sont dans un espace vectoriel de dimension $\leqslant 2$ et donc la famille est liée.

d) $\ln(x+1)$, $\ln(x+2)$, $\ln(x+3)$, sur $\mathbb{R}_{>0}$. *Indication. Dans ce cas on pourra par exemple dériver ...* Si $\forall\, x > 0$, $t_1 \ln(x+1) + t_2 \ln(x+2) + t_3 \ln(x+3) = 0$, alors en dérivant, $\frac{t_1}{x+1} + \frac{t_2}{x+2} + \frac{t_3}{x+3} = 0 \Rightarrow t_1 = t_2 = t_3$ par unicité de la décomposition en éléments simples. Donc la famille est libre.

Exercice 3 Soient les vecteurs suivants dans $\mathbb{R}^4$.

$$v_1 = (1,4,7,10),\ v_2 = (2,5,8,11),\ v_3 = (3,6,9,12),$$

$$v_4 = (1,0,1,1),\ v_5 = (1,1,0,1),\ v_6 = (1,1,1,0)\ .$$

On pose $F = \mathrm{Vect}\{v_1, v_2, v_3\}$, $G = \mathrm{Vect}\{v_4, v_5, v_6\}$.

a) Déterminer $\dim F$, $\dim G$ et donner une base de F et une base de G. $v_1 + v_3 = 2v_2$ donc les vecteurs sont liés et $\dim F \leqslant 2$. Or v_1, v_3 ne sont pas colinéaires donc (v_1, v_3) est une base de F et $\dim F = 2$. Les vecteurs v_4, v_5, v_6 sont $\mathbb{R}-$linéairement indépendants car par exemple si on prend les trois premières coordonnées de ces vecteurs, on obtient une matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

de déterminant $1 + 1 - 1 = 1 \neq 0$. Donc (v_4, v_5, v_6) est une base de G et $\dim G = 3$.

b) Déterminer $\dim(F\cap G)$ et donner une base de $F\cap G$. $F\cap G \leqslant F \Rightarrow \dim F\cap G \leqslant \dim F \Rightarrow \dim F = 0, 1$ ou 2.

Or, $F\cap G \neq 0$ car sinon $\dim F+G = \dim F + \dim G = 2+3 = 5 > 4$ absurde car $F+G \leqslant \mathbb{R}^4$. Soient $\lambda, \mu, x, y, z \in \mathbb{R}$. On a $\lambda v_1 + \mu v_3 = x v_4 + y v_5 + z v_6$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccc} x+y+z &=& \lambda+3\mu \\ y+z &=& 4\lambda+6\mu \\ x+z &=& 7\lambda+9\mu \\ x+y &=& 10\lambda+12\mu \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccc} x+y+z &=& \lambda+3\mu \\ y+z &=& 4\lambda+6\mu \\ -y &=& 6\lambda+6\mu \\ -z &=& 9\lambda+9\mu \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccc} x+y+z &=& \lambda+3\mu \\ y &=& -6\lambda-6\mu \\ z &=& -9\lambda-9\mu \\ 0 &=& 19\lambda+21\mu \end{array}\right.$$

ce système a une solution si et seulement si $19\lambda + 21\mu = 0$.

En particulier si $\lambda = 21$, $\mu = 19$, $0 \neq 21v_1 + 19v_3 = (78, 198, 318, 438) \in F\cap G$; en particulier si $\lambda = 1, \mu = 0$, on a $v_1 \notin G$ donc $F\cap G \neq F \Rightarrow \dim F\cap G = 1$ et le vecteur $21v_1 + 19v_3 = (78, 198, 318, 438)$ est une base de $F\cap G$.

c) En déduire $\dim(F+G)$ et donner une base de $F+G$. $\dim F+G = \dim F + \dim G - \dim F\cap G = 2+3-1 = 4$. Donc $F+G = \mathbb{R}^4$ et $((1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,1,0), (0,0,0,1))$ est une base de $F+G = \mathbb{R}^4$.

Exercice 4 Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $(x,y,z) \mapsto (x+2y+3z, 4x+5y+6z, 7x+8y+9z)$.

Soient
$$v_1 = (1,-2,1),\ v_2 = (2,1,1),\ v_3 = (1,-3,1)\ .$$

a) Quelle est la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$? $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$.

b) Donner une base de $\ker f$. En déduire le rang de f.

$$(x,y,z) \in \ker f \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x+2y+3z = 0 \\ 4x+5y+6z = 0 \\ 7x+8y+9z = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow x = z,\ y = -2z$$

donc $\ker f = \{(z,-2z,z)\ :\ z \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}(1,-2,1)$ et $(1,-2,1)$ est par exemple une base de $\ker f$.

Donc $\operatorname{rang} f = 3 - \dim\ker f = 2$.

c) Donner une base de im f. L'application f est-elle injective ? Surjective ? *Justifier.* Le sous-espace de $\mathbb{R}^3$, im f, est engendré par $u = f(1,0,0), v = f(0,1,0), w = f(0,0,1)$. Or, $u = (1,4,7), v = (2,5,8)$ ne sont pas colinéaires donc $\dim \operatorname{Vect}\{u,v\} = 2 = \dim \operatorname{im} f = 2 \Rightarrow (u,v)$ est une base de im f.

L'application f n'est ni injective, car $0 \neq (1,-2,1) \in \ker f$, ni surjective, car $\dim \operatorname{im} f = 2 < 3$.

d) Montrer que (v_1, v_2, v_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.

$$\det \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix} = -1 \neq 0 \text{ donc } (v_1, v_2, v_3) \text{ est une base de } \mathbb{R}^3.$$

e) Donner la matrice de f dans la base (v_1, v_2, v_3).

$$f(v_1) = 0,\ f(v_2) = (7, 19, 31),\ f(v_3) = (-2, -5, -8)\ .$$

On résout $xv_1 + yv_2 + zv_3 = (7, 19, 31)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + z & = & 7 \\ -2x + y - 2z & = & 19 \\ x + y + z & = & 31 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = 208,\ y = -24,\ z = -153\ .$$

On résout aussi $xv_1 + yv_2 + zv_3 = (-2, -5, -8)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + z & = & -2 \\ -2x + y - 2z & = & -5 \\ x + y + z & = & -8 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = 53,\ y = 6,\ z = 39\ .$$

Donc la matrice de f dans la base (v_1, v_2, v_3) est la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 208 & 53 \\ 0 & -24 & 6 \\ 0 & -153 & 39 \end{pmatrix}.$$