Fiche de TD 1
Espaces vectoriels et sous-espaces

Exercice 1 Montrer que l'ensemble des fonctions réelles de la forme

$$x \mapsto A\cos(x+\phi)\,,$$

où $A \in \mathbb{R}_{\geqslant 0}$, $\phi \in [0, 2\pi[$ sont des constantes, est un sous-$\mathbb{R}$-espace vectoriel de l'espace des fonctions réelles.

Exercice 2 Soient E_1, E_2 deux $K-$espaces vectoriels.
On dit que $f : E_1 \to E_2$ est linéaire si

$$\forall\, t \in K, \forall\, x \in E_1,\ f(tx) = tf(x) \text{ et } \forall\, x, y \in E_1,\ f(x+y) = f(x) + f(y)\ .$$

On pose $\mathscr{L}(E_1, E_2) = \{f : E_1 \to E_2\ :\ \ f \text{ est linéaire}\}$. Montrer que $\mathscr{L}(E_1, E_2)$ est un sous-espace vectoriel de $E_2^{E_1}$.

Exercice 3 a) Soit E est le $\mathbb{R}-$espace vectoriel des fonctions continues $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On note $\mathscr{P}$ (*respectivement* $\mathscr{I}$) l'ensemble des fonctions réelles continues paires (*respectivement* impaires). Montrer que $\mathscr{P}$, $\mathscr{I} \leqslant E$ et que $\mathscr{P} + \mathscr{I} = E$.

b) Soit $E = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Soit $\mathscr{S}$ (*respectivement* $\mathscr{A}$) l'ensemble des matrices réelles symétriques (*respectivement* antisymétriques) de taille n. Montrer que $\mathscr{S}$, $\mathscr{A} \leqslant E$ et que $\mathscr{S} + \mathscr{A} = E$.

c) Soit E l'ensemble des suites réelles $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$. Vérifier que E est un sous-espace vectoriel du $\mathbb{R}-$espace vectoriel des suites réelles et que $E = \mathbb{R}u + \mathbb{R}v$ où u, v sont les suites définies par : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$, $v_n = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$.

d) Soit E l'ensemble des fonctions $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fois dérivables telles que $y'' + y = 0$. Vérifier que c'est bien un espace vectoriel (comme sous-espace des fonctions réelles).

Montrer que $E = \mathbb{R}\cos + \mathbb{R}\sin$. *Indication. Soit y une fonction réelle dérivable. Vérifier qu'il existe a, b des fonctions réelles telles que $\forall x \in \mathbb{R}$, $y = a(x)\cos x + b(x)\sin x$, $y'(x) = -a(x) sinx + b(x)\cos x$ et que ces fonctions sont constantes si $y \in E$.*

Exercice 4 Soit E le $\mathbb{R}-$espace vectoriel des suites réelles.

Parmi les sous-ensembles suivants, lesquels sont des sous-espaces vectoriels ?

a) Les suites croissantes ;

b) les suites constantes ;

c) les suites constantes à partir d'un certain rang ;

d) les suites qui ont une limite ;

e) les suites (u_n) telles que $\lim u_n = 0$;

f) les suites (u_n) telles que $\lim u_n = +\infty$;

g) les suites qui n'ont pas de limite ;

h) les suites bornées ;

i) les suites non bornées.

j) $o(n)$;

k) $O(n)$;

l) les suites (u_n) telles que $\forall\, n \in \mathbb{N},\, u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.

Exercice 5 Soit $E = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Parmi les ensembles suivants, lesquels sont des sous-espaces de E ?

a) Les matrices diagonales ;

b) les matrices triangulaires supérieures ;

c) les matrices de diagonale nulle ;

d) les matrices diagonalisables ;

e) les matrices trigonalisables ;

f) les matrices nilpotentes ;

g) les matrices inversibles ;

h) les matrices non inversibles ;

i) les matrices de rang $\leqslant 1$.

Exercice 6 Soit E un $K-$espace vectoriel. Si $v_1, ...v_N \in E$, on pose :

$$\mathrm{Vect}\{v_1, ..., v_N\} = Kv_1 + ... + Kv_N = \{t_1v_1 + ... + t_Nv_N \;:\; \forall\, 1 \leqslant i \leqslant N,\, t_i \in K\}\ .$$

a) Montrer que $\mathrm{Vect}\{v_1, ...v_N\}$ est un sous-espace vectoriel de E.

b) Montrer que $\mathrm{Vect}\{(1,-1,0),(0,1,-1)\} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x+y+z=0\}$.

c) Trouver des équations linéaires $l_1, ..., l_k$ sur $\mathbb{R}^3$ telles que $\mathrm{Vect}\{(1,2,3),(4,5,6),(7,8,9)\} = \{(x,y,z) \,:\, l_1(x,y,z) = ... = l_k(x,y,z) = 0\}$.

d) Montrer que $\mathrm{Vect}\{x^n, x^{n-1}y, ...; xy^{n-1}, y^n\} = \{P(x,y) \in \mathbb{R}[x,y] \,:\, \forall\, t \in \mathbb{R}^*,\, P(tx,ty) = t^n P(x,y)\}$.

e) Soit $V \leqslant \mathrm{Vect}\{v_1, ..., v_N\}$ un sous-espace vectoriel. Montrer par récurrence sur N qu'il existe $0 \leqslant d \leqslant N$ et des vecteurs $e_1, ..., e_d \in \mathrm{Vect}\{v_1, ..., v_N\}$ tels que $V = \mathrm{Vect}\{e_1, ..., e_d\}$.

Indication. Appliquer l'hypothèse de récurrence à $V \cap \mathrm{Vect}\{v_1, ..., v_{N-1}\}$ *et considérer* $d = \{t \in \mathbb{R} \,:\, \exists\, t_1, ..., x_{N-1} \in \mathbb{R} \,:\, t_1v_1 + ... + t_{N-1}v_{N-1} + tv_N \in V\}$.

Exercice 7 Soit E un $K-$espace vectoriel. On note $E^* = \mathscr{L}(E, \mathbb{K})$. Si $F \leqslant E$, on note $F^\perp = \{l \in E^* \,:\, \forall\, x \in F,\, l(x) = 0\}$. Si $V \leqslant E^*$, on note $V^\circ = \{x \in E \,:\, \forall\, l \in V,\, l(x) = 0\}$.

a) Montrer que $E^\perp = 0$, $0^\perp = E^*$.

b) Montrer que si $F \leqslant E$, alors $F^\perp \leqslant E^*$ et si $V \leqslant E^*$, alors $V^0 \leqslant E$.

c) Montrer que si $F \leqslant E$, alors $F \leqslant (F^\perp)^\circ$. Montrer de même que si $V \leqslant E^*$, alors $V \leqslant (V^\circ)^\perp$. Montrer que cette inclusion peut être stricte.

d) Montrer que si $F \leqslant E$, alors $F^\perp = ((F^\perp)^\circ)^\perp$. De même montrer que si $V \leqslant E$, alors $V^\circ = ((V^\circ)^\perp)^\circ$.

e) Montrer que si $F_1, F_2 \in E$, alors $F_1 \leqslant F_2 \Rightarrow F_2^\perp \leqslant F_1^\perp$.

f) Soient $F_1, F_2 \leqslant E$. Montrer que $F_1^\perp \cap F_2^\perp = (F_1 + F_2)^\perp$. Démontrer une formule semblabe avec « $^\circ$ ».

g) Soient $F_1, F_2 \leqslant E$, montrer que $F_1^\perp + F_2^\perp \leqslant (F_1 \cap F_2)^\perp$ et une inclusion similaire avec les « $\circ$ ». Montrer que pour les $\circ$, l'inclusion peut être stricte.

Exercice 8 Soit E un $K-$espace vectoriel. Soit $F \leqslant E$ un sous-espace vectoriel. On pose :

$$\forall\, x \in E,\, \overline{x} = x + F = \{x + v \,:\, v \in F\} \subseteq E$$

et $E/F = \{\overline{x} \,:\, x \in E\}$.

On définit

$$\forall\, x, y \in E,\, \overline{x} + \overline{y} := \overline{x+y},\, \forall\, t \in K,\, \forall\, x \in E,\, t.\overline{x} = \overline{t.x} \;.$$

a) Soient $x, y \in E$. Vérifier que

$$\overline{x} = \overline{y} \Leftrightarrow x - y \in F \ .$$

b) Vérifier que les opérations ci-dessus sont bien définies.

c) Vérifier que pour ces opérations $(E/F, +, .)$ est un $K-$espace vectoriel.

Exercice 9 Soit $E = \mathbb{R}[X]$ le $\mathbb{R}-$espace vectoriel des polynômes réels.

Parmi les sous-ensembles suivants, lesquels sont des sous-espaces vectoriels de E ?

a) Les polynômes de degré $\leqslant n$;

b) les polynômes de degré $\geqslant n$;

c) les polynômes avec au moins n racines ;

d) les polynômes avec au plus n racines ;

e) Soient $x_1, ..., x_n \in \mathbb{R}$. Les polynômes dont l'ensemble des racines est contenu dans $\{x_1, ..., x_n\}$.

f) Soient $x_1, ..., x_n \in \mathbb{R}$. Les polynômes dont l'ensemble des racines contient $\{x_1, ..., x_n\}$.

g) Les polynômes P tels que $P'(1) = 0$;

h) les polynômes dont 1 est une racine au moins double ;

i) les polynômes dont 1 est une racine au plus double.

Exercice 10 Soit $E = \mathbb{R}[X, Y]$. Soit $I = \{P \in E \ : \ \forall \, t \in \mathbb{R}, \, P(\cos t, \sin t) = 0\}$. Soit $f = X^2 + Y^2 - 1 \in E$.

a) Montrer que $I \leqslant E$.

b) Montrer que les multiples du polynôme f sont dans I. On notera (f) l'ensemble des multiples de f.

c) Montrer que $E = (f) + \mathbb{R}[X] + \mathbb{R}[X]Y$.

d) En déduire que $I = (f)$.

Exercice 11 On pose $K = \mathbb{Q} + \mathbb{Q}\sqrt{2} \leqslant \mathbb{R}$.

a) Montrer que K est un sous-corps de $\mathbb{R}$ i.e. *stable par somme, produit et passage à l'inverse.*

b) Montrer que $\mathbb{Q} + \mathbb{Q}\sqrt{2} + \mathbb{Q}\sqrt{3} + \mathbb{Q}\sqrt{6}$ est un $K-$ espace vectoriel.