Fiche de TD 4
Familles libres, familles génératrices, bases *(exercices supplémentaires)*

Exercice 1 Montrer que les nombres

$$\ln p,\ p \text{ premier},$$

sont $\mathbb{Q}-$linéairement indépendants dans $\mathbb{R}$.

Exercice 2 Montrer que les nombres $1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{6}$ sont $\mathbb{Q}-$linéairement indépendants. *Indication. Si n est un entier sans facteur carré, alors $\sqrt{n} \notin \mathbb{Q}$.*

Exercice 3 a) Soient $E_1, E_2 \leqslant E$ deux sous$-K-$espaces vectoriels d'un $K-$espace vectoriel E. Montrer que $\dim(E_1 + E_2) = \dim E_1 + \dim E_2 - \dim(E_1 \cap E_2)$.

b) Montrer que si $E_1, E_2, E_3 \leqslant \mathbb{R}^2$, alors en général :

$$\dim(E_1 + E_2 + E_3) \neq$$

$$\dim E_1 + \dim E_2 + \dim E_3 - \dim(E_1 \cap E_2) - \dim(E_2 \cap E_3) - \dim(E_1 \cap E_3) + \dim(E_1 \cap E_2 \cap E_3).$$

Exercice 4 Dans $\mathbb{Q}^4$ soient les vecteurs

$v_1 = (1, 2, 3, 4)$, $v_2 = (1, 1, 1, 3)$, $v_3 = (2, 1, 1, 1)$, $v_4 = (-1, 0, -1, 2)$, $v_5 = (2, 3, 0, 1)$.

Soient $F = \mathrm{Vect}\{v_1, v_2, v_3\}$, $G = \mathrm{Vect}\{v_4, v_5\}$. Déterminer

$$\dim F,\ \dim G,\ \dim F \cap G,\ \dim F + G\ .$$

Exercice 5 Soient $x_0, ..., x_n$ des réels deux à deux distincts.

a) Montrer que les vecteurs

$$v_k = (x_0^k, ..., x_n^k),\ 0 \leqslant k \leqslant n$$

sont linéairement indépendants dans $\mathbb{R}^{n+1}$.

b) En déduire que si $y_0, ..., y_n \in \mathbb{R}$, il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré $\leqslant n$ tel que :

$$\forall\, 0 \leqslant k \leqslant n,\ P(x_k) = y_k\ .$$