**Fiche de TD 6**
**Réduction des endomorphismes**

**Exercice 1** a) Diagonaliser sur $\mathbb{R}$ la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?

b) Diagonaliser sur $\mathbb{R}$ la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Est-elle diagonalisable sur le corps $\mathbb{F}_3$ ?

**Exercice 2** a) Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Montrer que $\lambda = a + ib$ est une valeur propre de la matrice

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} .$$

b) Diagonaliser sur $\mathbb{C}$ la matrice

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} .$$

c) Calculer $\exp\left(\theta \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$.

**Exercice 3** a) Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ avec un vecteur propre $X + iY \in \mathscr{M}_{n1}(\mathbb{R})$ associé à une valeur propre complexe $\lambda + i\mu$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\mu \neq 0$. Montrer que le sous-espace $\operatorname{Vect}\{X, Y\}$ est stable par $A$.

b) En déduire que toute matrice symétrique réelle est diagonalisable sur $\mathbb{R}$. *Indication. Commencer par le cas de dimension* 2.

c) Donner un contre-exemple sur $\mathbb{C}$.

**Exercice 4** Si $P(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + ... + a_0 \in \mathbb{C}[X]$ on note $C_P \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots\, 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

a) Montrer que $P(C_P) = 0$. *Indication. Vérifier d'abord que* $P(C_P)e_1 = 0$ *où* $e_1 = {}^t(1, 0, ..., 0)$.

b) Montrer que $\chi_{C_P}(X) = P(X)$.

c) Montrer que si $u \in \mathscr{L}(E)$ et si $F \leqslant E$ est un sous-espace stable de $u$, alors $\chi_{u|_F} | \chi_u$ dans $\mathbb{C}[X]$.

d) En déduire que $\chi_u(u) = 0$ dans $\mathscr{L}(E)$.

e) Diagonaliser la matrice $\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & \ddots & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots\, 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

**Exercice 5** Soit $U_n(X)$ le polynôme à coefficients rationnels tel que

$$\sin(nx) = U_n(\cos x) \sin x \ .$$

a) Calculer $U_1, U_2$ et montrer la formule *de récurrence*

$$U_{n+1} + U_{n-1} = 2XU_n \ .$$

Quel est le degré de $U_n$ ?

b) Si $n \geqslant 1$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, on note $T_n(a, b, c)$ la matrice $\begin{pmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 \\ c & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & b \\ 0 & \cdots & 0 & c & a \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

Montrer que $\chi_{T_n(a,b,c)}(X) = \sqrt{bc}^n U_{n+1}\left(\frac{X-a}{2\sqrt{bc}}\right)$ si $bc > 0$. *Indication. Trouver une relation de récurrence pour les polynômes caractéristiques ...*

c) Diagonaliser la matrice $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.