Fiche de TD 8

Exercice 1 Suite de Fibonacci Soient $F_0 = 0$, $F_1 = 1$. On pose $\forall\, n \geqslant 2$, $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$.

a) Vérifier que
$$\forall\, n \geqslant 1,\ \begin{pmatrix} F_n \\ F_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} F_{n-1} \\ F_n \end{pmatrix}$$
où $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. En déduire que $\forall\, n \geqslant 1,\ A^n = \begin{pmatrix} F_{n-1} & F_n \\ F_n & F_{n+1} \end{pmatrix}$.

b) En déduire une formule pour F_n en fonction de n.

c) En déduire que $\forall\, m, n \geqslant 0,\ F_{m+n} = F_{m+1}F_n + F_m F_{n-1}$.

d) Vérifier que $\forall\, n \geqslant 0,\ F_{n+1} \wedge F_n = 1$.

e) En déduire que pour tous $m, n \in \mathbb{N}$,
$$F_m \wedge F_n = F_{m\wedge n}\ .$$

f) En déduire que si $p_1, ..., p_k > 2$ sont des nombres deux à deux premiers entre eux[†], alors il y a au moins k nombres premiers dans la liste des facteurs premiers des nombres $F_{p_1}, ..., F_{p_k}$. En déduire qu'il y a une infinité de nombres premiers distincts en calculant F_{19}.

Exercice 2 Exprimer en fonction de n les suites définies par récurrence.

a) $u_0 = 0,\ u_1 = 1,\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 2u_n - v_n,\ v_{n+1} = -u_n + 2v_n$.

b) $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} + u_{n+1} + u_n = n,\ u_0 = u_1 = 1$.

c) $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} - 6u_{n+1} + 9u_n = 0,\ u_0 = u_1 = 1$.

d) Calculer en fonction de $n \in \mathbb{N}$, $a, b, c \in \mathbb{C}$, le déterminant de la matrice de taille n $\begin{pmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 \\ c & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & b \\ 0 & \cdots & 0 & c & a \end{pmatrix}$

†. par exemple $3, 4, 5, 7, 11, 13, 17, 19, ...$

Exercice 3 suites homographiques

Soient $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ tels que $ad - bc \neq 0$. Soit u_n une suite qui vérifie

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{au_n + b}{cu_n + d}\ .$$

a) Si $c = 0$, trouver u_n en fonction de n. *Indication. Si* $\frac{ax+b}{d} = x$, *alors* $(u_n - x)$ *est une suite arithmétique !*

On supposse maintenant que $c \neq 0$.

b) Vérifier que si l'équation $\frac{ax+b}{cx+d} = x$ a deux racines distinctes $\alpha \neq \beta$, alors la suite $\frac{u_n-\alpha}{v_n-\beta}$ est géométrique.

c) Vérifier que si l'équation $\frac{ax+b}{cx+d} = x$ a une racine double α, alors la suite $\frac{1}{u_n-\alpha}$ est arithmétique.

d) Déterminer la suite u_n définie par

$$u_0 = 0,\ u_{n+1} = \frac{1}{2 - u_n}$$

en fonction de n.

e) Trouver une formule pour $\tan(nx)$ en fonction de $\tan x$. *Indication.* $\tan(x+y) = \frac{\tan x+\tan y}{1-\tan x \tan y}$.

Exercice 4 arctan et nombres de Fibonacci

a) Soit (F_n) la suite de Fibonacci (*voir l'exercice 1*).

Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N},\ F_{n+1}^2 = F_n F_{n+2} + (-1)^n$. *Indication. Avec les notations de l'exercice* 1, $\det A^n = (-1)^n$ *...*

b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\arctan \frac{1}{F_{2n}} = \arctan \frac{1}{F_{2n+1}} + \arctan \frac{1}{F_{2n+2}}\ .$$

Indication. D'après la question précédente, $F_{2n+1}^2 = F_{2n}F_{2n+2} + 1 \Leftrightarrow F_{2n+1}(F_{2n+2} - F_{2n}) = F_{2n}F_{2n+2} + 1 \Leftrightarrow \frac{1}{F_{2n}} = \frac{F_{2n+2}+F_{2n+1}}{F_{2n+1}F_{2n+2}-1}$ ...