Fiche de TD 9

Exercice 1 Soit (a_n) une suite réelle telle que $\forall n \geqslant 2,\ a_n = \frac{a_{n-1}+a_{n-2}}{2}$. Déterminer $\lim a_n$ en fonction de a_0, a_1.

Exercice 2 *Calculer* $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{30}$.

Exercice 3 Soit $R = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \in \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$.

a) Montrer que s'il est non nul, le vecteur $\begin{pmatrix} a_{23} - a_{32} \\ a_{31} - a_{13} \\ a_{12} - a_{21} \end{pmatrix}$ est un vecteur propre pour la valeur propre 1.

b) Montrer que s'il est défini, le vecteur $\begin{pmatrix} (a_{23} + a_{32})^{-1} \\ (a_{31} + a_{13})^{-1} \\ (a_{12} + a_{21})^{-1} \end{pmatrix}$ est un vecteur propre pour la valeur propre 1.

Exercice 4 Soit $N \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice nilpotente.

a) Montrer que $\det(I_n + N) = 1$.

b) Montrer que si $N^i \neq 0$, alors $\operatorname{im} N^{i+1} \underset{\neq}{<} \operatorname{im} N^i$.

c) En déduire que $N^n = 0$.

Exercice 5 *Réduire* la matrice $\begin{pmatrix} 6 & -10 & -10 \\ 3 & -5 & -6 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Exercice 6 Exprimer en fonction de n, u_0, u_1 les suites (u_n) définies par les formules de récurrence suivantes.

a) $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = au_n + b\,$;

b) $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n + 1\,;$

c) $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = \frac{u_{n+1}+u_n}{2} + 1\,;$

d) $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n + 1.$

Exercice 7 Exprimer en fonction de n, u_0, v_0 les suites (u_n), (v_n) définies par les formules de récurrence suivantes.

a) $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\left\{\begin{array}{rcl} u_{n+1} & = & 2u_n - v_n + 1 \\ v_{n+1} & = & -u_n + 2v_n - 1 \end{array}\right.\ ;$

b) $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\left\{\begin{array}{rcl} u_{n+1} & = & 2u_n - v_n + 1 \\ v_{n+1} & = & -u_n + 2v_n + 1 \end{array}\right.\ ;$