Université Claude Bernard Lyon 1

L3 – Géométrie 2023

Ceva par les barycentres

Exercice : Ceva

On se place (encore) dans le plan affine avec ABC triangle non plat. On appelle Cevienne issue de A toute droite passant par le sommet A, son "pied" est alors le point d'intersection avec le côté opposé BC. On travaille dans le repère affine (barycentrique) ABC.

1. On calcule les coordonnées de A', B' et C' en fonction des rapports de mesures algébriques apparaissant dans la formule de Ceva. Soient A' tel que $\dfrac{\overline{BA'}}{\overline{CA'}} = -x$, alors $\overrightarrow{BA'} + x\overrightarrow{CA'} = 0$. On trouve $A' = [0, 1, x]$,$B' = [y, 0, 1]$ et $C' = [1, z, 0]$.

   (On avait relégué ce calcul à plus tard dans le td, je le fais là car cela allège un peu les calculs)
2. La condition d'être barycentre de A et A' implique que les 2 dernières coordonnées sont multiples de $(1, x)$ et barycentre de BB' implique que les coordonnées sont multiples de $(y, *, 1)$ donc $AA' \cap BB'$ a pour coordonnées $(xy, 1, x)$. A condition que la somme $xy+x+1$ soit non-nulle, auquel cas les droites sont parallèles.
3. (Variante) On aurait pu aussi, calculer l'équation cartésienne de AA' :

   $$\begin{vmatrix} 1 & 0 & X \\ 0 & 1 & Y \\ 0 & x & Z \end{vmatrix} = Z - xY = 0$$

   idem pour BB' :

   $$X - yZ = 0$$

   Donc l'intersection si elle existe est de la forme $[xy\lambda, \lambda, x\lambda] = [xy, 1, x]$. (Si $xy+x+1 \neq 0$).
4. Si $D = AA' \cap BB'$, D est barycentre de C et C' si et seulement si $(1, z)$ est proportionnel $(xy, 1)$ donc $xyz = 1$.

   Si $AA' \cap BB'$ est vide, (les droites AA' et BB' sont parallèles) $xy + x + 1 = 0$, alors $xyz + xz + z = 0$. Ainsi, $xyz = 1$ équivaut à $AA' \cap CC'$ parallèles.