Université Claude Bernard Lyon 1
Licence 3 de Mathématiques : Géométrie
Année 2023

Géométrie affine

On se place dans un espace affine, souvent de dimension 2 ou 3 muni d'un repère.

# Première partie
# Espaces affines, Dans un repère

## I

### 1° Droite affine, mesure algébrique

On se place sur une droite affine $\mathscr{E}$ (espace affine de dimension 1) et soit $u \in \overrightarrow{\mathscr{E}}$. Pour tout couple de points, $(A, B)$. On définit $\overline{AB} \in \mathbb{K}$ tel que $\overrightarrow{AB} = \overline{AB}u$. Montrer que pour tout quadruplet de points $A, B, C, D$ le rapport $\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}}$ ne dépend pas, lui, de $u$.

### 2° Attention à la caractéristique 2

Soit $\mathbb{K}$ un corps de caractéristique 2. (2=0) Montrer que dans tout espace affine les diagonales d'un parallèlogrammes sont parallèles.

## II Équations cartésiennes

### 1° Exemples d'équations de droites et de plans en guise d'échauffement

**a)** Soient $A = (1, 1)$ et $B = (2, 1)$. Donner une équation cartésienne de la droite passant par ces deux points.
**b)** Soient $A = (1, 2, -3)$, $B = (4, -5, -2)$ et $C = (3, -2, -3)$. Donner une équation du plan passant par ces trois points.

### 2° Équation d'une droite dans le plan $\mathbb{R}^2$

Soit $A = (x_A, y_A)$ et $B = (x_B, y_B)$ deux points distincts du plan. Montrer qu'un point $M = (x, y)$ appartient à la droite $(AB)$ si et seulement si

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_A & x_B & x \\ y_A & y_B & y \end{vmatrix} = 0.$$

### 3° Équation d'un plan dans l'espace $\mathbb{R}^3$

**a)** Soit $A = (x_A, y_A, z_A)$ un point, $u_1 = (a_1, b_1, c_1)$ et $u_2 = (a_2, b_2, c_2)$ deux vecteurs non colinéaires. Montrer qu'un point $M = (x, y, z)$ appartient au plan contenant $A$ et engendré par $u_1$ et $u_2$ si et seulement si

$$\begin{vmatrix} x - x_A & a_1 & a_2 \\ y - y_A & b_1 & b_2 \\ z - z_A & c_1 & c_2 \end{vmatrix} = 0.$$

**b)** En s'inspirant de 1°, exprimer une équation du plan $(ABC)$ par l'annulation d'un déterminant $4 \times 4$, où $A = (x_A, y_A, z_A)$, etc.

## III Présentation paramétrique et équation cartésienne

**1°** Soient $a$, $b$, $c$, $d$ tels que $(a,b) \neq (0,0)$. Soit $D$ l'ensemble des points $(x,y)$ défini par la condition :

$$(x,y) \in D \iff \exists t \in \mathbb{R},\ \begin{cases} x = at + c \\ y = bt + d. \end{cases}$$

Quelle est la nature de $D$ ? En donner une équation cartésienne.

**2°** Soient $a$, $b$, $c$ trois réels avec $(a,b) \neq (0,0)$. Donner une présentation paramétrique de la droite d'équation $ax + by + c = 0$ dans $\mathbb{R}^2$.

**3°** Poser et résoudre les mêmes questions pour une droite et un plan dans l'espace.

## IV Incidence

**1° Deux droites dans le plan**

Soit deux droites $D$ et $D_2$ d'équations[1] $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ et $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ dans le plan. L'annulation de quel déterminant caractérise-t-il le parallélisme de ces deux droites ?

**2° Trois droites dans le plan**

Ajoutons une troisième droite $D_3$ d'équation $a_3x + b_3y + c_3 = 0$. Montrer que $D_1$, $D_2$ et $D_3$ sont parallèles ou concourantes si et seulement si

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$$

**3° Deux plans dans l'espace**

Soit trois plans $P_1$ et $P_2$ d'équations $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ et $a_2x + b_2y + c_2z + d = 0$ dans l'espace. Montrer que $P_1$ et $P_2$ sont parallèles ou confondus si et seulement si

$$\operatorname{rg}\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix} = 1 \quad \text{SSI} \quad \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0.$$

## V Changement de repère

**1°** Dans $\mathbb{R}^2$, on note $(x,y)$ les coordonnées d'un point dans le repère canonique. Montrer que le système définit un changement de repère ; décrire et tracer ce nouveau repère (origine, axes) :

$$\begin{cases} x' = 2x - y + 1 \\ y' = x + y + 2 \end{cases}$$

**2°** On se place dans $\mathbb{R}^n$ affine, où $n$ est un entier naturel non nul. Rappelons que l'on dit que $(A_0, A_1, \ldots, A_n)$ est un repère affine si $(A_0, \overrightarrow{A_0A_1}, \ldots, \overrightarrow{A_0A_n})$ est un repère. Cette définition semble faire jouer un rôle particulier à $A_0$. Montrer que pour toute permutation $\sigma$ de $\{1, \ldots, n\}$, $(A_{\sigma(0)}, \ldots, A_{\sigma(n)})$ est un repère affine. [On pourra commencer par des exemples en dimension 2 et 3, disons, $(A_2, A_0, A_1)$ en dimension 2 et $(A_2, A_1, A_3, A_0)$ en dimension 3.]

1. On se donne $a_1$, $b_1$, $c_1$ et on suppose que $(a_1, b_1) \neq (0,0)$. Idem pour les autres droites et plans.

## Deuxième partie
# Applications affines

## VI Applications affines

### 1° Mesure algébrique

Montrer que les applications linéaires conservent l'alignement et les rapports de mesures algébriques.

**2°** On se place dans le plan $\mathbb{R}^2$.
**a)** Déterminer une application affine qui envoie le parallélogramme $P$ de sommets $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$, $(1,1)$ sur le parallélogramme $P'$ délimité par les droites d'équations $2x-y+1=0$, $2x-y-1=0$, $x+y=2$, $x+y=5$.
**b)** Existe-t-il une application affine qui envoie $P$ sur le quadrilatère $Q$ dont les sommets sont $(1,1)$, $(-1,1)$, $(2,0)$, $(-1,0)$ ?
**c)** Combien existe-t-il d'applications affines qui envoient $P$ sur $P'$ ?

### 3° Thalès

**a)** On se place dans un plan affine. Soit trois droites $d, d'$ et $d''$ parallèles distinctes. Soient $D_1$ et $D_2$ deux droites dont aucunes n'est parallèles . Soient $A_i = D_i \cap d$, $A_i' = D_i \cap d'$ et $A_i'' = D_i \cap d''$. Montrer que :

$$\frac{\overline{A_1A_1''}}{\overline{A_1A_1'}} = \frac{\overline{A_2A_2''}}{\overline{A_2A_2'}}$$

et que réciproquement si $B \in D_1$ et

$$\frac{\overline{A_1B}}{\overline{A_1A_1'}} = \frac{\overline{A_2A_2''}}{\overline{A_2A_2'}}$$

alors il est sur $d''$.
**b)** Que peut on dire de plus si $A_1 = A_2$
**c)** Quel généralisation en dimension supérieure ?

### 4° Pappus–version 0

On se place dans un plan affine. Soit $A, B, C$ trois points d'une droite $D$ et $A', B', C'$ trois points d'une droite $D'$ distincte de $D$. Montrer que si $AB'$ est parallèle à $BA'$ et $BC'$ parallèle $CB'$, alors $AC'$ est parallèle à $CA'$.

### 5° Un « truc » utile

Soit $\varphi$ un endomorphisme linéaire d'un espace vectoriel $E$. On suppose que l'image de tout vecteur est un vecteur qui lui est colinéaire. Écrire cette hypothèse en termes de $\forall$, $\exists$. Écrire en termes analogues la définition d'une homothétie vectorielle. Comparer les deux écritures et montrer que $\varphi$ est quand même une homothétie vectorielle.

### 6° Principe de conjugaison (premier avatar)

**a)** Étant donnés un point $O$ dans un espace affine et un scalaire $l$, on note $h_{O,l}$ l'homothétie de centre $O$ et de rapport $l$. Pour $\varphi$ affine, décrire $\varphi h_{O,l} \varphi^{-1}$.
**b)** Soient $\mathscr{F}$ et $\mathscr{F}'$ deux sous-espaces affines dont les directions sont supplémentaires. On peut donc parler de la projection $p_{\mathscr{F},\mathscr{F}'}$ sur $\mathscr{F}$ parallèlement à $\mathscr{F}'$. Pour $\varphi$ affine, décrire $\varphi p_{\mathscr{F},\mathscr{F}'} \varphi^{-1}$.

**7°** **Centre du groupe affine**

Quelles sont les applications affines $\varphi$ telles que pour toute application affine $\psi$, on ait : $\varphi \circ \psi = \psi \circ \varphi$ ?

**8°** **Homothéties-translations**

Montrer que l'ensemble des transformations affines d'un espace affine qui sont soit une homothétie, soit une translation, est stable par composition et passage à l'inverse. Comment se représentent ces transformations en coordonnées ?

**9°** **Problème de Varignon**

Étant donnés $n$ points $A_1, \ldots, A_n$ d'un plan affine $\mathscr{P}$, existe-t-il $n$ points $B_1, \ldots, B_n$ tels que $A_1, \ldots, A_n$ soient les milieux respectifs des segments $[B_1B_2]$, $[B_2B_3], \ldots, [B_nB_1]$ ? (On étudiera en particulier les cas $n = 3$ et $n = 4$.)

## VII Projections

**1°** **Deux calculs explicites**

**a)** Soit $D$ la droite d'équation $x + y = 1$ et $\Delta$ la droite d'équation $x - 2y + 1 = 0$. Déterminer les coordonnées de l'image d'un point du plan par la projection sur $D$ parallèlement à $\Delta$ (resp. sur $\Delta$ parallèlement à $D$). Quelle relation entre les deux projections ?
**b)** Soit $D$ la droite passant par $A = (1, 2, 3)$ et dirigée par $v = (1, 1, 1)$ et soit $P$ le plan d'équation $x + y + z = 1$. Déterminer les coordonnées de l'image d'un point du plan par la projection sur $D$ parallèlement à $P$ (resp. sur $P$ parallèlement à $D$). Quelle relation entre les deux projections ?

**2°** Soit $p$ une application affine d'un espace affine $\mathscr{E}$ dirigé par $E$ dans lui-même telle que $p \circ p = p$. Montrer que $p$ est une projection. Préciser ses éléments caractéristiques. Contre-exemple si on ne suppose plus $p$ affine ?

# Troisième partie
# Barycentres

## VIII Affinités (encore)

**1°** **Une situation classique**

Soit $ABC$ un triangle non aplati dans un plan affine. Soient $M_0$ un point de la droite $(AB)$ et :
- $M_1$ le projeté de $M_0$ sur $(AC)$ parallèlement à $(BC)$ ;
- $M_2$ le projeté de $M_1$ sur $(BC)$ parallèlement à $(AB)$ ;
- $M_3$ le projeté de $M_2$ sur $(AB)$ parallèlement à $(AC)$ ;
- $M_4$ le projeté de $M_3$ sur $(AC)$ parallèlement à $(BC)$ ;
- $M_5$ le projeté de $M_4$ sur $(BC)$ parallèlement à $(AB)$ ;
- $M_6$ le projeté de $M_5$ sur $(AB)$ parallèlement à $(AC)$.

En calculant les coordonnées des points $M_k$ dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$, montrer que $M_6 = M_0$. Vérifier que $M_0$ peut s'écrire comme barycentre des points $A$ et $B$. Exprimer $M_1$ comme un barycentre de $A$ et $C$, $M_2$ comme un barycentre de $B$ et $C$, etc. Redémontrer ainsi sans calcul que $M_6 = M_0$.

### 2° Groupe « du » triangle

On fixe, dans un plan affine, un triangle $ABC$ non aplati. On note $G$ le groupe des transformations affines bijectives qui préservent $ABC$.

**a)** Combien d'éléments contient $G$ ? Rappeler pourquoi en utilisant le cours.

**b)** Décrire tous les éléments de $G$ en donnant les coordonnées de l'image d'un point quelconque du plan en fonction des coordonnées du point dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$, puis dans le repère $(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC})$ où $O$ est le centre de gravité du triangle.

### 3° Géométrie projective cachée

Soit $\mathscr{E}$ un espace affine de dimension $n$, $(A_0, \ldots, A_n)$ une base affine de $\mathscr{E}$.

**a)** Soient $l_0, \ldots, l_n$ des réels dont la somme n'est pas nulle et soit $M$ le barycentre de $\{(A_i, l_i)\}_{0 \leqslant i \leqslant n}$. Calculer les coordonnées de $M$ dans le repère $(A_0, \overrightarrow{A_0A_1}, \ldots, \overrightarrow{A_0A_n})$.

**b)** Soit l'espace affine $\mathscr{E} \times \mathbb{R}$ de dimension $n+1$. On dénote les points $A_i \times \{1\}$ par $B_i$. Soit $O$ un point qui n'appartient pas au sous-espace défini par les $B_i$. Calculer l'équation paramétrique dans le repère $(\overrightarrow{OB_1}, \ldots, \overrightarrow{0B_n})$ de la droite passant par $O$ et par le barycentre de $\{(B_i, l_i)\}_{0 \leqslant i \leqslant n}$.

## IX Coordonnées barycentriques

Ici, on appelle « coordonnées barycentriques » d'un point $M$ de $\mathscr{P}$ tout triplet de réels $(a, b, c)$ dont la somme n'est pas nulle tel que $M$ soit le barycentre de $\begin{pmatrix} A & B & C \\ a & b & c \end{pmatrix}$. Vérifier que :

- il existe au moins un tel triplet ;
- deux tels triplets sont nécessairement proportionnels.

Pour rendre uniques les coordonnées barycentriques, la convention habituelle est d'exiger que leur somme vaille 1.

**Exemple simple :** Des coordonnées barycentriques du centre de gravité $G$ du triangle sont :

$$G : \quad (1, 1, 1).$$

### 1° Barycentres et barycentres partiels

Soit $M$ un point et $(a, b, c)$ des coordonnées barycentriques de $M$ dans le repère $(A, B, C)$.

**a)** Donnez le lieu des points satisfaisant $a = 0$.

**b)** Donnez le lieu des points satisfaisant $a > 0$.

**c)** Donnez le lieu des points satisfaisant $b = c$.

**d)** Donnez la forme générale des coordonnées barycentriques des droites parallèles à (BC).

**e)** Montrer que $M$ n'est pas sur la parallèle à $(BC)$ contenant $A$ si et seulement si $b + c \neq 0$.

On suppose que ces conditions sont remplies, et on note $P$ l'intersection de $(AM)$ et $(BC)$ et $(b', c')$ des coordonnées barycentriques de $P$ dans le repère affine $(B, C)$ de la droite $(BC)$.

**f)** Quel lien y a-t-il entre $(a, b, c)$ et $(b', c')$ ?

### 2° Des Barycentres dans l'espace

Soient $(A, B, C, D)$ 4 points de l'espace affine de dimension 3. Soit $T$ le tétrèdre ABCD. Soient $(X, Y, Z, T, U, V)$ les milieux repectifs de $[AB], [CD], [AD], [BC], [AC], [BD]$. Montrer que les segments $[XY], [ZT], [UV]$ concourrent en leur milieu. Montrer que ce point est le centre de gravité du tétraèdre.

### 3° Equations cartésienne de droite en coordonnées barycentriques

On se donne $(A, B, C)$ un repère affine du plan. Soient $M_1$ et $M_2$ deux points, quelle est l'équation cartésienne de la droite $M_1M_2$ en fonction des coordonnées barycentrique de $M_1$ et $M_2$ ?

**4°** **Ceva**

On considère un triangle $ABC$ et $A' \in BC$, $C' \in AB$ et $B' \in AC$. Montrer que $AA'$, $BB'$ et $CC'$ sont parallèles ou concourantes si et seulement si ils vérifient l'égalité :

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = -1 \ .$$