Cours d'analyse réelle
L3 maths pour l'enseignement

1 Construction de $\mathbb{R}$

Définition. Soit $(x_n) \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ une suite de rationnels. On dit que c'est une suite de Cauchy si $\forall\, \epsilon \in \mathbb{Q}_0$, $\exists\, N \in \mathbb{N}$, $\forall\, m, n \geqslant N$, $|x_m - x_n| < \epsilon$.

Exemples. La suite $1 + \frac{1}{1!} + ... + \frac{1}{n!}$ est de Cauchy

Exercice. Toute suite de Cauchy est bornée.

Exercice. Toute suite croissante majorée est de Cauchy.

Soit $\mathcal{C}$ l'ensemble des suites de Cauchy de $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$. On vérifie que si $x = (x_n)_n, y = (y_n)_n \in \mathcal{C}$, alors $x + y = (x_n + y_n)_n$, $xy = (x_n y_n)_n$ aussi.

Soit $\mathscr{N}$ l'ensemble des suites $x = (x_n) \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ qui tendent vers 0.[†]

Si $x \in \mathcal{C}$, on pose $\dot{x} := x + \mathscr{N} = \{x + u \ : \ u \in \mathscr{N}\}$.

On pose $R := \mathcal{C}/\mathscr{N} = \{\dot{x} \ : \ x \in \mathcal{C}\}$.

1.1 Inclusion de $\mathbb{Q}$ dans R

Si $r \in \mathbb{Q}$, on note $\boldsymbol{r} = (r, r, ...)$ la suite constante égale à r.

Proposition 1.1 *L'aplication $\mathbb{Q} \to R$, $r \mapsto \dot{\boldsymbol{r}}$ est injective.*

Notation. On identifiera $r \in \mathbb{Q}$ avec la classe $\dot{\boldsymbol{r}} \in R$.

1.2 Opérations sur R

Si $x, y \in \mathcal{C}$, on pose $\dot{x} + \dot{y} := \overbrace{x + y}^{\cdot}$, $\dot{x}\dot{y} := \overbrace{\ xy\ }^{\cdot}$.

Proposition 1.2 *Les opérations + et ·. sont bien définies et pour ces opérations $(R, +, \cdot)$ est un corps.*

Démo. Soit $x \in \mathcal{C}$. Si $x \notin \mathscr{N}$, comme x est de Cauchy, il existe $\epsilon > 0$ et $N \in \mathbb{N}$ tels que $\forall\, n \geqslant N$, $|x_n| \geqslant \epsilon$. Quitte à ajouter une suite nulle à partir du rang N, on peut supposer que $\forall\, n \in \mathbb{N}, |x_n| \geqslant \epsilon$.

On a alors $\dot{x}^{-1} = \overbrace{(\frac{1}{x_n})_n}^{\cdot}$.

†. *c-à-d* $\forall\, \epsilon \in \mathbb{Q}_{>0}$, $\exists\, N \in \mathbb{N}$, $\forall\, n \geqslant N$, $|x_n| < \epsilon$.

1.3 Relation d'ordre sur R

Si $\dot{x}, \dot{y} \in R$, on note $\dot{x} \leqslant \dot{y}$ si :

$$\exists\, u \in \mathcal{N}, \forall\, n \in \mathbb{N},\ x_n + u_n \geqslant y_n \ .$$

Proposition 1.3 *i) La relation $\leqslant$ est une relation d'ordre total sur R.*

ii) $(R, +, \cdot, \leqslant)$ est un corps ordonné archimédien.[†]

iii) $\mathbb{Q}$ est dense dans R au sens où $\forall\, \dot{x} < \dot{y}$ dans R, $\exists\, r \in \mathbb{Q}$, $\dot{x} < r < \dot{y}$.

1.4 Borne supérieure

Définition. Soit $(E, \leqslant)$ un ensemble totalement ordonné. Soit $A \subseteq E$ on dit que $M \in E$ est un majorant de A, resp. $m \in E$ est un minorant de A, si $\forall\, a \in A$, $a \leqslant M$, resp. $\forall\, a \in A$, $a \geqslant m$.

On dit que $s \in E$ est une borne supérieure de A si

1) s est un majorant de A
et
2) pour tout majorant M de A, $s \leqslant M$.

On dit que $i \in E$ est une borne inférieure de A si

1) i est un minorant de A
et
2) pour tout minorant m de A, $i \geqslant m$.

Notation. S'ils existent, $\sup A := s$, $\inf A := i$.

On dit que $(E, \leqslant)$ a la propriété de la borne supérieure, resp. la propriété de la borne inférieure, si toute partie non vide majorée de E admet une borne supérieure, resp. si toute partie non vide minorée de E admet une borne inférieure.

Exercice. Si $(E, \leqslant)$ a la propriété de la borne supérieure, alors il a aussi la propriété de la borne inférieure.

Solution. $\inf A = \sup\{\text{minorants de } A\}$.

Exemples et contre-exemples.

†. Un corps ordonné est un corps $(K, +, \cdot)$ avec un ordre total $\leqslant$ tel que 1) $\forall\, z \in K$, $x \leqslant y \Rightarrow x + z \leqslant y + z$; 2) $\forall\, z \geqslant 0$, $x \leqslant y \Rightarrow xz \leqslant yz$. Un corps ordonné archimédien est un corps ordonné $(K, +, \cdot, \leqslant)$ tel que $\forall\, x \in K, \forall\, y > 0, \exists\, n \in \mathbb{N}, ny = \underbrace{y + \ldots + y}_{n\text{ fois}} \geqslant x$.

$$\inf\{\frac{1}{n+1} \ : \ n \in \mathbb{N}\} = 0, \, \sup\{\sum_{k=0}^{n} 2^{-k} \ : \ n \in \mathbb{N}\} = 2$$

Les ensembles

$$\{x \in \mathbb{Q} \ : \ x^2 < 2\}, \, \left\{\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \ : \ n \in \mathbb{N}\right\}$$

n'ont pas de bornes supérieures dans $\mathbb{Q}$.

1.5 R est complet

Proposition 1.4 L'ensemble ordonné $(R, \leqslant)$ vérifie la propriété de la borne supérieure *et donc aussi la propriété de la borne inférieure.*

Démonstration : Soit $\varnothing \neq A \subseteq R$ une partie majorée ; Soit $m_0 \in \mathbb{Q}$ un majorant de A. Soit $l_0 \in \mathbb{Q}$ qui n'est pas un majorant de A.

On définit par récurrence :

$$\forall \, n \in \mathbb{N}, \, m_{n+1} := \begin{cases} \frac{m_n + l_n}{2} & \text{si } \frac{m_n + l_n}{2} \text{ majore } A \\ m_n & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$\text{et } l_{n+1} := \begin{cases} l_n & \text{si } \frac{m_n + l_n}{2} \text{ majore } A \\ \frac{m_n + l_n}{2} & \text{sinon.} \end{cases}$$

On vérifie que $\forall \, n \in \mathbb{N}$, $l_n, m_n \in \mathbb{Q}$, $l_n \leqslant m_n$ et que la suite (l_n) est croissante et la suite (m_n) décroissante.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $m_n - l_n = \frac{m_0 - l_0}{2^n}$ donc :

$$\forall \, n \in \mathbb{N}, \, l_n \leqslant l_{n+1} \leqslant m_{n+1} \leqslant m_n$$

$$\Rightarrow 0 \leqslant m_n - m_{n+1} \leqslant m_n - l_n = \frac{m_0 - l_0}{2^n} \ .$$

.

D'où :

$$\forall \, k > n, \, m_k - m_n = \sum_{i=n}^{k-1} m_i - m_{i+1} \leqslant \sum_{i=n}^{k-1} 2^{-i}(m_0 - l_0)$$

$$\leqslant \sum_{i=n}^{\infty}(m_0 - l_0)2^{-k} = (m_0 - l_0)2^{-n+1} \ .$$

Donc la suite (m_n) est de Cauchy. De même pour la suite (l_n).

On a $\dot{m} = \dot{l} \in R$.

Vérifions que $\dot{m}$ est une borne supérieure pour A.

Soit $a \in A$. Alors pour tout n, $m_n \geqslant a$, car m_n est un majorant de A.

Donc $\dot{m} \geqslant a$ *(exo)*.

Donc $\dot{m}$ est un majorant de A.

Réciproquement, soit M un majorant de A. Alors pour tout n, $l_n < M$ car l_n n'est pas un majorant de A.

On en déduit que $\dot{l} = \dot{m} \leqslant M$.

Donc $\dot{l} = \dot{m}$ est bien le plus petit majorant de A.

Q.e.d.

Corollaire. Toute suite croissante majorée dans R converge dans R †. De même, toute suite décroissante minorée dans R converge dans R.

Démonstration : Si $(x_n) \in R^{\mathbb{N}}$ est une suite croissante majorée, alors $\lim_n x_n = \sup\{x_k \ : \ k \in \mathbb{N}\}$. **Q.e.d.**

Proposition 1.5 *Toute suite de Cauchy ‡ dans R converge.*

Démonstration : La suite (x_n) est de Cauchy donc bornée *(exo)*. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $\overline{x}_n = \sup\{x_k \ : \ k \geqslant n\}$ et $\underline{x}_n = \inf\{x_k \ : \ k \geqslant n\}$.

La suite $(\overline{x}_n)$ est décroissante et la suite $(\underline{x}_n)$ est croissante *(exo)*. De plus,

$$\forall\, n,\ \underline{x}_n \leqslant x_n \leqslant \overline{x}_n \ .$$

Les limites $l_1 = \lim_n \overline{x}_n$ et $l_2 = \lim_n \underline{x}_n$ existent dans R.

†. **Définition.** Si $(x_n) \in R^{\mathbb{N}}$, on dit que (x_n) converge vers $l \in R$, noté $\lim_n x_n = l \in R$, si :

$$\forall\, \epsilon > 0,\ \exists\, N \in \mathbb{N},\ \forall\, n \geqslant N,\ |x_n - l| < \epsilon \ .$$

‡. **Définition.** Une suite réelle $(x_n) \in R^{\mathbb{N}}$ est de Cauchy si :

$$\forall\, \epsilon > 0,\ \exists\, N \in \mathbb{N},\ \forall\, m, n \geqslant N,\ |x_m - x_n| < \epsilon \ .$$

Soit $\epsilon > 0$. Comme la suite (x_n) est de Cauchy,

$$\exists\, N \in \mathbb{N},\, \forall\, m, n \geqslant N,\, |x_m - x_n| < \epsilon \ .$$

Donc $\forall\, m, n \geqslant N,\, x_m - x_n < \epsilon \Rightarrow \forall\, n \geqslant N,\, \overline{x}_N - x_n \leqslant \epsilon \Rightarrow \overline{x}_N - \underline{x}_N \leqslant \epsilon$.
Or, la suite $(\overline{x}_n - \underline{x}_n)$ est décroissante donc :

$$\forall\, n \geqslant n,\, \overline{x}_n - \underline{x}_n \leqslant \epsilon \Rightarrow l_1 - l_2 \leqslant \epsilon \ .$$

C'est vrai pour toute $\epsilon > 0$ donc $0 \leqslant l_1 - l_2 \leqslant 0 \Rightarrow l_1 = l_2$.
Donc $\lim_n x_n = l_1 = l_2$ existe dans R. **Q.e.d.**