Université Claude Bernard Lyon 1

MASTER M1-G

Algèbre

PARTIEL

24 Novembre 2015

Durée : 2h00

Exercice 1.

1. Montrer qu'il existe un seul groupe non abélien de la forme $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$. Montrer que la loi du groupe, notée $*$, est donnée par

$$(x, y) * (x', y') = (x + (-1)^y x', y + y'),\ x, y, x', y' \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}.$$

(on expliquera brièvement au passage pourquoi $(-1)^y$ a un sens)

2. Montrer que les sous-groupes $\langle(1, 0)\rangle$ et $\langle(0, 1)\rangle$ de $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ sont d'intersection triviale, et en déduire que $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ est engendré par $(1, 0)$ et $(0, 1)$.
3. Montrer que $(2, 2)$ est dans le centre de $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$. Quel est l'ordre du groupe quotient $H := \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}/\langle(2, 2)\rangle$?
4. Montrer que, dans le groupe quotient H, on a $(1, 0)^2 = (0, 1)^2 = (1, 1)^2$.
5. On pose $Q_8 := \langle a, b : a^2 = b^2 = (ab)^2\rangle$. Montrer qu'il existe un morphisme surjectif de Q_8 dans H.
6. Montrer, dans Q_8, l'égalité $b^{-1}ab = a^{-1}$, puis $a^4 = 1 = b^4$.
7. En déduire l'inégalité $|Q_8| \leq 8$ sur l'ordre de Q_8, puis que Q_8 et H sont isomorphes.

Exercice 2.

On considère le groupe linéaire $G := \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$.

1. Montrer que l'ordre de G est égal à 48.
2. Soit P_1 le sous-groupe engendré par la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Montrer que le normalisateur $N(P_1)$ de P_1 est le sous-groupe des matrices triangulaires supérieures de G, et en déduire que le nombre de 3-Sylow de G est $n_3(G) = 4$.

3. On pose P_2 le sous-groupe engendré par la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer le sous-groupe $N(P_1) \cap N(P_2)$. Montrer qu'il est d'ordre 4 et qu'il n'est pas distingué dans G.

   On notera dans la suite P_i, i de 1 à 4, les quatre 3-Sylow de G. Si $g \in G$ et $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, on note $\sigma_g(i) \in \{1, 2, 3, 4\}$ tel que $gP_ig^{-1} = P_{\sigma_g(i)}$.
4. Déterminer le noyau du morphisme $G \to S_4$, $g \mapsto \sigma_g$ et en déduire que $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) \simeq S_4$ (*indication : le noyau est distingué et inclus dans* $N(P_1) \cap N(P_2)$).
5. Montrer que les quatre $3-$Sylow de G sont aussi les quatre $3-$Sylow de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$. En déduire que, dans $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$, il y a exactement 8 éléments d'ordre 3.
6. En déduire qu'il y a au moins 8 éléments d'ordre 6 dans $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$.
7. En déduire qu'il existe dans $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ un seul $2-$Sylow d'ordre 8. On le note Q.
8. Montrer que Q est le sous-groupe de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ engendré par les matrices $I := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $J := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.
9. Montrer que Q est isomorphe au groupe Q_8 de l'exercice 1.