

II — GROUPES DÉFINIS PAR GÉNÉRATEURS ET RELATIONS  
(suite)

**Exercice 1** Soit  $G = \langle a, b : aba = bab \rangle$  le groupe des tresses à trois cordes. Posons  $x = ab^2$  et  $y = ab$ .

- Montrer que  $G$  est engendré par  $x$  et  $y$ .
- Montrer que  $x^2 = y^3 \in Z(G)$ .
- Montrer que  $G/\langle x^2 \rangle$  est isomorphe à  $PSL(2, \mathbb{Z})$ .
- En déduire que  $Z(G)$  est engendré par  $x^2 = y^3$  et que  $G/Z(G) \simeq PSL(2, \mathbb{Z})$ .

**Exercice 2** Montrer que  $SL_2(\mathbb{Z}) \simeq \langle a, b : a^4 = 1, a^2 = b^3 \rangle$  (indication : remarquer que  $a^2$  est dans le centre).

**Exercice 3** Montrer que  $(\mathbb{Q}, +) \simeq \langle x_n, n \geq 1 : x_n = x_{nk}^k, k, n \geq 1 \rangle$  (indication : montrer que tout élément non trivial du membre de droite s'écrit sous la forme  $x_p^{\pm q}$ ,  $p, q \geq 1$  et justifier l'existence d'un morphisme de groupes  $x_n \mapsto 1/n$ ).

**Exercice 4** Soit  $G = \langle x, y \rangle$  le groupe libre engendré par deux éléments.

- Montrer que  $x^2, y^3$  engendrent un groupe isomorphe à  $G$ .
- Montrer que  $x^2, y^2, xy$  engendrent un groupe isomorphe au groupe libre à 3 générateurs.
- On pose pour tout  $i \geq 0$ ,  $z_i := y^i x y^{-i}$ . Montrer que le groupe  $\langle z_0, z_1, \dots \rangle$  est un groupe libre avec un nombre dénombrable de générateurs.

**Exercice 5** (difficile) Montrer que le groupe  $\langle a, b, c : a^{-1}ba = b^2, b^{-1}cb = c^2, c^{-1}ac = a^2 \rangle$  est trivial.

**Exercice 6** Soit  $G$  un groupe. Soit  $T$  une partie de  $G$ . On note  $N$  le plus petit sous-groupe distingué de  $G$  contenant  $T$ . Montrer que  $N = \langle S \rangle$  où  $S = \cup_{g \in G} gTg^{-1}$ ;

**Exercice 7** Soit  $G_n$  le groupe

$$\langle s_1, \dots, s_n : \forall i, s_i^2 = 1, \forall i, (s_i s_{i+1})^3 = 1, \forall j \geq i + 2, (s_i s_j)^2 = 1 \rangle .$$

- On pose  $H := \langle s_2, \dots, s_n \rangle \leq G_n$ . Montrer que

$$G_n/H = H \cup s_1 H \cup s_2 s_1 H \cup \dots \cup s_n \dots s_1 H .$$

- Montrer par récurrence sur  $n$  que  $G_n \simeq \mathfrak{S}_{n+1}$ .

**Exercice 8** Montrer que

$$\mathfrak{S}_n \simeq \langle x_i, 1 \leq i \leq n-1 : \forall i, j, k \neq i, x_i^2 = (x_i x_j)^3 = (x_i x_j x_i x_k)^2 = 1 \rangle$$

(indication : considérer les transpositions  $(1i)$  et si  $H := \langle x_1, \dots, x_{n-2} \rangle$ , vérifier que  $\langle x_1, \dots, x_{n-2} \rangle = H \cup x_{n-1} H \cup x_1 x_{n-1} H \cup \dots \cup x_{n-2} x_{n-1} H$ ).

**Exercice 9** Montrer que :

$$\mathfrak{A}_n \simeq \langle x_i, 1 \leq i \leq n-2 : x_1^3 = 1, \forall i \geq 2, x_i^2 = 1, \forall i, (x_i x_{i+1})^3 = 1, \forall j > i+1, (x_i x_j)^2 = 1 \rangle$$

(indication : si  $G := \langle x_i, 1 \leq i \leq n-2 \rangle$ , si  $H = \langle x_i, 1 \leq i \leq n-3 \rangle$ , montrer que  $G = H \cup x_{n-2}H \cup \dots \cup x_1 \dots x_{n-2}H \cup x_1^2 x_2 \dots x_{n-2}H$ ).

**Exercice 10**

- a) Montrer que  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_9)$  contient un sous-groupe  $H$  isomorphe à  $\mathfrak{A}_5$  (indication : utiliser la présentation  $\mathfrak{A}_5 = \langle x, y : x^2 = y^3 = (xy)^5 = 1 \rangle$  et considérer les matrices :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & i-1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

où  $i^2 = -1$ ).

- b) En déduire, en considérant l'action de  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_9)$  sur  $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_9)/H$  que :

$$\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_9) \simeq \mathfrak{A}_6 .$$

**Exercice 11** Montrer que les groupes simples  $\mathfrak{A}_8$  et  $\mathrm{PSL}_3(\mathbb{F}_4)$  ont même cardinal mais ne sont pas isomorphes (indication : en utilisant la forme réduite de Jordan des matrices, montrer que dans  $\mathrm{PSL}_3(\mathbb{F}_4)$  les éléments d'ordre 2 sont conjugués).

**Exercice 12** Soit  $G$  le groupe de présentation :

$$\langle r, s, t : r^2 = s^3 = t^3 = rst \rangle .$$

- a) Montrer que  $rst$  est dans le centre de  $G$  et que  $G/\langle rst \rangle \simeq \mathfrak{A}_4$ .  
 b) Montrer que  $G$  est d'ordre 24 (indication : poser  $x = st, y = s^2 t s^{-1}$ , vérifier que  $x^2 = y^2 = (xy)^2$  et montrer que  $(rst)^2 = 1$ ).  
 c) Montrer que  $G$  ne contient pas de sous-groupe d'ordre 12.

**Exercice 13**  $\mathrm{Aut}(Q_8)$

On rappelle que  $Q_8$  est engendré par  $i, j$  avec les relations  $i^2 = j^2 = (ij)^2$ .

- a) Si  $\varphi \in \mathrm{Aut}(Q_8)$ , vérifier que  $\varphi(-1) = -1$ . En déduire que  $\mathrm{Aut}(Q_8)$  est d'ordre au plus 24.  
 b) Justifier l'existence de  $s, t \in \mathrm{Aut}(Q_8)$  tels que  $s : i \mapsto -j, j \mapsto i, t : i \mapsto -j, j \mapsto ij$ .  
 c) Quel est l'ordre de  $s$ ? de  $t$ ? de  $st$ ? En déduire qu'il existe un morphisme de groupes  $\mathfrak{S}_4 \rightarrow \mathrm{Aut}(Q_8)$  dont l'image contient  $s, t$ .  
 d) Montrer que l'image du morphisme ci-dessus est un multiple de 12 et en déduire que  $\mathfrak{S}_4 \simeq \mathrm{Aut}(Q_8)$ .