

IV — PRODUITS SEMIDIRECTS (SUITE)

Exercice 1 [] Soient N, H deux groupes et soit $\phi : H \rightarrow \text{Aut}(N)$, $h \mapsto \phi_h$, un morphisme de groupes. Montrer que pour tout $(h, n) \in H \times N$, on a l'égalité suivante dans $N \rtimes_{\phi} H$:

$$(1, h)(n, 1)(1, h)^{-1} = (\phi_h(n), 1) .$$

Exercice 2 [Critères d'isomorphismes entre produits semidirects] Soient H, N deux groupes. Soient $\phi_1, \phi_2 : H \rightarrow \text{Aut}N$ deux morphismes de groupes.

- a) On suppose qu'il existe $\gamma \in \text{Aut}(H)$ tel que $\phi_2 = \phi_1 \circ \gamma$. Montrer que $N \rtimes_{\phi_1} H \simeq N \rtimes_{\phi_2} H$.
- b) On suppose qu'il existe $\gamma \in \text{Aut}N$ tel que pour tout $h \in H$:

$$\phi_{2,h} = \gamma^{-1} \phi_{1,h} \gamma .$$

Montrer que $N \rtimes_{\phi_1} H \simeq N \rtimes_{\phi_2} H$.

- c) En déduire que les groupes non abéliens de la forme :

$$(\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2) \rtimes \mathbb{Z}/3$$

sont tous isomorphes. De même pour les groupes de la forme :

$$\mathbb{Z}/3 \rtimes (\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2) .$$

- d) Soient p, q deux nombres premiers > 0 . On suppose que $p|q-1$. Montrer que les groupes non abéliens de la forme :

$$\mathbb{Z}/q \rtimes \mathbb{Z}/p$$

sont isomorphes.

Exercice 3 a) Montrer que $D_4 \simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

b) Montrer qu'il existe un morphisme $\phi : \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow \text{Aut}(D_4)$ non trivial tel que $D_4 \rtimes_{\phi} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \simeq D_4 \rtimes_{\phi} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

c) Montrer qu'il existe un seul groupe non abélien d'ordre 29×7 .

d) Soit $\phi : \mathbb{Z}/7\mathbb{Z} \rightarrow \text{GL}_2(\mathbb{Z}/29\mathbb{Z})$, $\bar{1} \mapsto \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$. Montrer que $G := (\mathbb{Z}/29\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/29\mathbb{Z}) \rtimes_{\phi} \mathbb{Z}/7\mathbb{Z} \simeq \langle x, y, z : x^{29} = y^{29} = z^7 = 1, zxz^{-1} = x^7, zyz^{-1} = y^{16}, xy = yx \rangle$.

Soient $N_1 := (\mathbb{Z}/29\mathbb{Z} \times 0) \times 0$, $N_2 := (0 \times \mathbb{Z}/29\mathbb{Z}) \times 0$. Montrer que $G = N_i \rtimes K_i$ avec $N_1 \simeq N_2$, $K_1 \simeq K_2$ mais qu'il n'existe pas d'automorphisme φ de G tel que $\varphi(N_1) = N_2$.

Exercice 4

- a) Soit G un groupe de centre Z . Montrer que si G/Z est cyclique, alors G est abélien. En déduire que les groupes d'ordre p^2 , où p est premier, sont abéliens.

- b) Si $p \geq 3$ est premier, montrer que $(\mathbb{Z}/p^n)^\times$ est cyclique (en revanche, $\mathbb{Z}/2^n$ n'est pas cyclique si $n \geq 3$).
- c) Montrer qu'il existe (à isomorphisme près) un seul sous-groupe non abélien de la forme :

$$\mathbb{Z}/49\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} .$$

- d) Déterminer l'ordre de $\text{Aut}(\mathbb{Z}/7 \times \mathbb{Z}/7)$. Montrer que les 3-Sylow de $\text{Aut}(\mathbb{Z}/7 \times \mathbb{Z}/7)$ sont isomorphes à $\mathbb{Z}/3 \times \mathbb{Z}/3$ (indication : considérer les matrices $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$).
- e) En déduire que si $A \in \text{Aut}(\mathbb{Z}/7 \times \mathbb{Z}/7)$ est d'ordre 3 alors A est conjugué à une des matrices :

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}^{\pm 1}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^{\pm 1}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{\pm 1}$$

- f) Montrer que si G est un groupe d'ordre 147, alors G contient un unique 7-Sylow.
- g) Déterminer, à isomorphisme près, tous les groupes d'ordre 147 (il y a deux abéliens, un $\mathbb{Z}/49 \rtimes \mathbb{Z}/3$ et trois $(\mathbb{Z}/7 \times \mathbb{Z}/7) \rtimes \mathbb{Z}/3$).

Exercice 5 Si p est un nombre premier, on note $U_{3,p}$ le groupe des matrices de la forme :

$$\begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$x, y, z \in \mathbb{F}_p$.

- a) Montrer que $U_{3,2} \simeq \mathbb{Z}/4 \rtimes \mathbb{Z}/2$ (le groupe diédral d'ordre 8) ;
- b) montrer que si $p \geq 3$, $U_{3,p} \simeq (\mathbb{Z}/p \times \mathbb{Z}/p) \rtimes \mathbb{Z}/p$.

Exercice 6 Soit $p \geq 3$ premier. Soit G un groupe non abélien d'ordre p^3 .

- a) Montrer que $G/Z \simeq \mathbb{Z}/p \times \mathbb{Z}/p$ et que $Z = (G, G)$.
- b) On suppose que g, h commutent avec $[g, h] := ghg^{-1}h^{-1}$. Montrer que pour tous m, n entiers, $[g^m, h^n] = [g, h]^{mn}$.
- c) Montrer que pour tout n entier, $g^n h^n = (gh)^n [g, h]^{\binom{n}{2}}$.
- d) En déduire que $g \mapsto g^p$ est un morphisme de groupes.
- e) Montrer que si tous les éléments de G sont d'ordre p , montrer que $G \simeq U_{3,p}$ (indication : vérifier que G admet un sous-groupe distingué d'indice p).
- f) Montrer que si G admet un élément x d'ordre p^2 , alors il existe $y \in G \setminus \langle x \rangle$ d'ordre p (indication : soit $y \notin \langle x \rangle$; comme $Z = \langle x^p \rangle$, $y^p = x^{pr}$ pour un certain r , alors yx^{-r} est d'ordre p). En déduire que G est un produit semidirect $\mathbb{Z}/p^2 \rtimes \mathbb{Z}/p$.

- g) Montrer que tous les produits semidirects non abéliens $\mathbb{Z}/p^2 \rtimes \mathbb{Z}/p$ sont isomorphes au groupe :

$$G_p := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{Z}/p^2, a \equiv 1 \pmod{p} \right\} .$$