V — Automorphismes de $\mathfrak{S}_n$

Exercice 1 Soit $n \geqslant 5$. On rappelle que le groupe $\mathfrak{A}_n$ est simple.

a) Soit G un sous-groupe distingué de $\mathfrak{S}_n$. Montrer que $G = \{1\}, \mathfrak{A}_n$, ou $\mathfrak{S}_n$.

b) Soit G un sous-groupe d'indice n de $\mathfrak{S}_n$. En considérant une action de G sur $\mathfrak{S}_n/G$, montrer que $G \simeq \mathfrak{S}_{n-1}$.

Exercice 2 Soit $n \geqslant 2$.

a) Soit $\phi \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{S}_n)$. On suppose que ϕ envoie une transposition sur une transposition. Montrer que ϕ est un automorphisme intérieur *(indication : on suppose que $\phi((12)) = (a_1a_2)$, $\phi((23)) = (a_2a_3)$; montrer qu'il existe $a_4, ..., a_n \in \{1, ..., n\}$ tels que $\phi((ii+1)) = (a_ia_{i+1})$ pour tout $1 \leqslant i \leqslant n-1$)*.

b) Soit $\phi \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{S}_n)$. Montrer que ϕ permute les classes de conjugaison de $\mathfrak{S}_n$.

c) Déterminer le nombre de transpositions dans $\mathfrak{S}_n$. Plus généralement déterminer le cardinal de la classe de conjugaison d'une involution (un $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ d'ordre 2).

d) En déduire que si $n \neq 6$, tous les automorphismes sont intérieurs.

e) Soit H un sous-groupe transitif de $\mathfrak{S}_6$ d'indice 6 (transitif = qui agit transitivement sur $\{1, ..., 6\}$). On note $\phi : \mathfrak{S}_6 \to \mathfrak{S}_6$ le morphisme induit par l'action de $\mathfrak{S}_6$ sur $\mathfrak{S}_6/H$. Montrer que ϕ est un automorphisme non intérieur (*indication : on numérote $g_1H, ..., g_6H$ les classes à droite de $\mathfrak{S}_6/H$ avec $g_1 = 1$; pour tout i, $H_i := \{\sigma \in \mathfrak{S}_6 : \sigma(i) = i)$; montrer que $\phi(H) = H_1$ mais que $\forall\, i$, $H \neq H_i$*).

f) Montrer que $\mathfrak{S}_5$ a six 5−Sylow. En déduire l'existence d'un sous-groupe transitif de $\mathfrak{S}_6$ d'indice 6. Autre méthode : montrer que $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}) \simeq \mathfrak{S}_5$, en déduire l'existence d'un sous-groupe transitif de $\mathfrak{S}_6$ d'indice 6. En déduire l'existence d'un automorphisme non intérieur de $\mathfrak{S}_6$.

g) On pose : $\sigma_1 := (12)(34)(56)$, $\sigma_2 := (23)(45)(16)$, $\sigma_3 := (34)(15)(26)$, $\sigma_4 := (45)(12)(36)$, $\sigma_5 := (16)(34)(25)$, $s_i := (ii+1)$, $1 \leqslant i \leqslant 5$. Montrer qu'il existe un automorphisme

$$\varphi : \mathfrak{S}_6 \to \mathfrak{S}_6$$

tel que $\varphi(s_i) = \sigma_i$ *indication on peut utiliser la présentation suivante de $\mathfrak{S}_6$: $\langle x_1, ..., x_5 \,:\, \forall\, i,\, x_i^2 = 1,\, \forall\, i,\, (x_ix_{i+1})^3 = 1,\, \forall\, i+2 \leqslant j,\, (x_ix_j)^2 = 1\rangle$.*

h) Montrer que $(16) = s_1s_2s_3s_4s_5s_4s_3s_2s_1$, $(15) = s_1s_2s_3s_4s_3s_2s_1$, $(26) = s_2s_3s_4s_5s_4s_3s_2$, $(36) = s_3s_4s_5s_4s_3$, $(25) = s_2s_3s_4s_3s_2$. En déduire que $\varphi \circ \varphi = \mathrm{int}_{\,(13524)}$ où pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_6$, on a posé $\mathrm{int}_{\,\sigma} := \sigma \cdot \sigma^{-1} \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{S}_6)$. Montrer que $\mathrm{Int}_{\mathfrak{S}_6}$ est d'indice 2 dans $\mathrm{Aut}\mathfrak{S}_6$. En considérant $\langle \varphi^5 \rangle$, en déduire que $\mathrm{Aut}(\mathfrak{S}_6) \simeq \mathfrak{S}_6 \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.