VIII

Exercice 1 *Soit A un anneau principal. On suppose par l'absurde qu'il existe un idéal $I \leqslant A[X]$ qui n'est pas de type fini.*

a) *Montrer qu'il existe une suite strictement croissante $(f_0) < (f_0, f_1) < ... < (f_0, ..., f_n) < ...$ d'idéaux de A inclus dans I tels que $f_n \in I \setminus (f_0, ..., f_{n-1})$ est de degré minimal.*

b) *On note a_n le coefficient de f_n. Montrer qu'il existe N tel que pour tout $n \geqslant N$, $(a_0, ..., a_n) = (a_0, ...a_N)$.*

c) *Montrer qu'il existe $p_0, ..., p_N \in A[X]$ tels que*

$$f_{N+1} - \sum_{i=0}^{N} p_i X^{\deg f_{N+1} - \deg f_i} f_i \in I \ .$$

En déduire une contradiction !

Exercice 2

a) Montrer que les seules solutions de $y^2+4 = x^3$ dans $\mathbb{Z}$ sont $(\pm 11, 5)$ et $(\pm 2, 2)$ *(indication : raisonner dans l'anneau principal $\mathbb{Z}[i]$; commencer par le cas où x, y sont impairs. Si x, y sont pairs, montrer que la norme de $y/2 \pm i$ est paire et donc que $1 + i | y/2 \pm i$; puis montrer que $\frac{y/2+i}{1+i}$ et $\frac{y/2-i}{1+i}$ sont premiers entre eux et sont des cubes dans $\mathbb{Z}[i]$ ...).*

b) Montrer que les seules solutions de $y^2 + 2 = x^3$ dans $\mathbb{Z}$ sont $(3, \pm 5)$ *(indication : raisonner dans l'anneau principal $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$).*

Exercice 3 Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif. Montrer que dans l'anneau $\mathbb{K}[T^2, T^3]$, T^5 et T^6 n'ont pas de PGCD.

Exercice 4 Montrer que l'anneau $\mathbb{C}[X, Y, Z]/(XZ - Y^2)$ n'est pas factoriel. (*On pourra montrer que cet anneau est isomorphe à* $\mathbb{C}[U^2, UV, V^2] \subset \mathbb{C}[U, V]$).

Exercice 5 (**Critère de réduction**) Soient A un anneau factoriel, K son corps des fractions, p un élément irréductible de A et $\overline{K}$ le corps des fractions de $A/(p)$. Soit $P = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i \in A[X]$ tel que p ne divise pas a_n et $\overline{P} = \sum_{i=0}^{n} \overline{a}_i X^i$ est un polynôme irréductible de $\overline{K}[X]$, où $\overline{a}_i$ est l'image de a_i par la projection canonique $A \to A/(p)$. Montrer que P est irréductible dans $K[X]$ (et donc dans $A[X]$ si le pgcd de ses coefficients est 1). En considérant la réduction modulo 3, montrer que $X^3 - X + 2$ est irréductible dans $\mathbb{Z}[X]$.

Exercice 6 (**Critère d'Eisenstein**) Soient A un anneau factoriel et K son corps des fractions. Soient q un élément irréductible de A et $P = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$ un polynôme de $A[X]$ tels que : q ne divise pas a_n, $q | a_i$ pour $0 \leqslant i < n$ et q^2 ne divise pas a_0. Montrer que P est irréductible dans $K[X]$ (et donc dans $A[X]$ si le pgcd de ses coefficients est 1). En déduire que pour tout nombre premier p, $X^{p-1} + X^{p-2} + \cdots + X + 1$ est irréductible dans $\mathbb{Z}[X]$.

Exercice 7 Etudier l'irréductibilité de $X^2 + Y^2 + Z^2$ sur un corps $\mathbb{K}$.

Exercice 8

a) Factoriser $X^4 - 2$ sur $\mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{F}_p$.

b) Montrer que $X^4 + 1$ est réductible $\mod p$ pour tout nombre premier p.

Exercice 9 L'objectif est de montrer qu'il n'existe pas de solution de l'équation suivante dans $\mathbb{Z}^3$:

$$X^3 + Y^3 = Z^3, \qquad XYZ \neq 0. \tag{1}$$

Par l'absurde, on suppose qu'il en existe une. Suppose que (X, Y, Z) est une solution de (1) telle que $|XYZ|$ soit minimal.

a) Montrer que X, Y ou Z est pair.
On supposera dans la suite que Z est pair.

b) Montrer que X et Y sont premiers entre eux.

c) Soient $U, V \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$ tels que $X = U + V$ et $Y = U - V$. Montrer que U et V sont des entiers premiers entre eux et de parités différentes.

d) On suppose que 3 ne divise pas Z. Montrer qu'il existe $S, W \in \mathbb{Z}$ tels que $2U = S^3$ et $U^2 + 3V^2 = W^3$.

e) (Fait en cours) En travaillant dans $A = \mathbb{Z}\left[\frac{1+\sqrt{-3}}{2}\right]$, montrer que

$$2U = (2a + b)(a - b)(a + 2b), \qquad 2V = 3ab(a + b),$$

avec les entiers a et b premiers entre eux.

f) Montrer que $a - b, a + 2b$ et $2a + b$ sont des cubes. En déduire une plus petite solution de (1).

g) Traiter le cas où $3|Z$.

Exercice 10 *a) Soit $f := Y^2 - X^3$. Montrer que f est irréductible et que* $\mathrm{Frac}\mathbb{C}[X, Y]/(f) = \mathbb{C}(t)$ *où $t := Y/X$.*

b) Soit $f := Y^2 + X^2 - 1$. Montrer que f est irréductible et que $\mathrm{Frac}\mathbb{R}[X, Y]/(f) = \mathbb{R}(t)$ *où $t := Y/(X + 1)$.*

c) Soit $f := Y^3 - X^3 - 1$. Montrer que f est irréductible et que $\mathrm{Frac}\mathbb{C}[X, Y]/(f)$ *n'est pas isomorphe à un corps de la forme $\mathbb{C}(t)$.*