M1G
Anneaux, corps et représentations
contrôle du vendredi 27 octobre 2023
1h30

Ni documents, ni calculatrices, ni téléphones, ni ordinateurs ne sont autorisés.

Exercice 1 a) **2pts Question de cours.** Rappeler l'énoncé du lemme de Schur et montrer que si G est un groupe abélien fini, alors toute représentation irréductible de G est de degré 1.

b) **2pts** Réciproquement, en utilisant des relations d'orthogonalité des tables de caractères, montrer que si G est un groupe fini dont toutes les représentations irréductibles sont de degré 1, alors G est abélien.

Exercice 2 On rappelle la table des caractères du groupe $\mathfrak{S}_3$:

	C_1	C_2	C_3
χ_1	1	1	1
χ_2	1	-1	1
χ_3	2	0	-1

a) **1,5pt** Déterminer les trois classes de conjugaison C_1, C_2, C_3 du groupe $\mathfrak{S}_3$ et leurs cardinaux : h_1, h_2, h_3. Calculer

$$|\mathfrak{S}_3| \sum_{i=1,2,3} \frac{1}{h_i} \ .$$

b) **3pts** On pose $\forall\, 1 \leqslant i,j,k \leqslant 3$, $g_{ijk} = \langle \chi_i\chi_j, \chi_k \rangle_{\mathfrak{S}_3}$.
Calculer $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j,k\leqslant 3} g_{ijk}^2$.
Indication. Remarquer que $\forall\, i$, $\chi_1\chi_i = \chi_i, \chi_2^2 = \chi_1$ *et utiliser les relations d'orthogonalité pour simplifier.*
Que remarque-t-on ?

Exercice 3 Soit $G = \mathfrak{S}_4$.

a) **2pts** Rappeler quelles sont les classes de conjugaison de G et donner le cardinal de chacune. En déduire le nombre de caractères irréductibles de G.
On admet que les deux caractères de degré 1 *de* G *sont le caractère trivial, noté* χ_1, *et le caractère signature, noté* χ_2.

b) **2pts** On considère la représentation $\rho : G \to \mathrm{GL}_4(\mathbb{C})$, $\sigma \mapsto P_\sigma = (\delta_{i,\sigma(j)})_{1\leqslant i,j\leqslant 4}$ †. *On admet que c'est bien une représentation.* On note χ_ρ son caractère.
Justifier que $\chi_\rho = \chi_1 + \chi_3$ où χ_3 est un caractère irréductible de degré 3.

c) **4pts** Soit $\rho_3 : G \to \mathrm{GL}(V)$ une représentation irréductible associée au caractère χ_3.
Donner une base de V et exprimer les matrices de $\rho_3(g)$ dans cette base pour

$$g = 1,\ (12),\ (123),\ (1234),\ (12)(34) \in G \ .$$

†. On utilise le symbole de Kronecker $\delta_{x,y} = 1$ si $x = y$, 0 sinon.

d) **0,5pt** On pose $\chi_4 = \chi_2\chi_3$. Justifier que c'est encore un caractère irréductible de degré 3 et que $\chi_4 \neq \chi_3$.

e) **3pts** En utilisant les relations d'orthogonalité, compléter la table de caractères de G.

	1				
χ_1	1				
χ_2	1				
χ_3	3				
χ_4	3				
χ_5					

f) **4pts** Décomposer chaque caractère $\chi_i|_{A_4}$ en somme de caractères irréductibles du groupe alterné A_4. Vérifier qu'on obtient ainsi tous les caractères irréductibles de A_4.