Les représentations irréductibles du groupe diédral

Soit $D_n = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ le groupe diédral d'ordre $2n$.

Rappelons que comme ensemble $D_n = \{(k, \epsilon) \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\}$ et que la loi de groupe est donnée par :

$$\forall\, k, k' \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z},\ \forall\, \epsilon, \epsilon' \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z},$$

$$(k, n) * (k', \epsilon') = (k + (-1)^{\epsilon} k', \epsilon + \epsilon')\ .$$

1 Les classes de conjugaison de D_n

— **Si n pair**

$$\{(\pm k, 0)\}, 0 \leqslant k \leqslant \frac{n}{2},$$

$$\{(0,1), (2,1), ..., (2n-2, 1)\},$$

$$\{(1,1), (3,1), ..., (2n-1, 1)\}\ .$$

Cela fait $\frac{n}{2} + 3$ classes.

— **Si n impair**

$$\{(\pm k, 0)\}, 0 \leqslant k \leqslant \frac{n-1}{2},$$

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times 0\ .$$

Cela fait $\frac{n+1}{2}$ classes.

2 Les représentations irréductibles de degré 1 de D_n

— **Si n pair**

$$\rho_0^{(1)} : (k, \epsilon) \mapsto 1,$$

$$\rho^{(1)} : (k, \epsilon) \mapsto (-1)^{\epsilon},$$

$$\rho_2^{(1)} : (k, \epsilon) \mapsto (-1)^{\frac{kn}{2}},$$

$$\rho_3^{(1)} : (k, \epsilon) \mapsto (-1)^{\frac{kn}{2} + \epsilon}\ .$$

— **Si n impair**

$$\rho_0^{(1)} : (k, \epsilon) \mapsto 1,$$

$$\rho_2^{(1)} : (k, \epsilon) \mapsto (-1)^{\epsilon}\ .$$

3 Les représentations irréductibles de degré 2 de D_n

- **Si n pair**

$$\rho_l^{(2)} : (k, \epsilon) \mapsto \begin{pmatrix} \cos \frac{2kl\pi}{n} & -(-1)^\epsilon \sin \frac{2kl\pi}{n} \\ \sin \frac{2kl\pi}{n} & (-1)^\epsilon \cos \frac{2kl\pi}{n} \end{pmatrix}, 1 \leqslant l \leqslant \frac{n}{2} - 1$$

- **Si n impair**

$$\rho_l^{(2)} : (k, \epsilon) \mapsto \begin{pmatrix} \cos \frac{2kl\pi}{n} & -(-1)^\epsilon \sin \frac{2kl\pi}{n} \\ \sin \frac{2kl\pi}{n} & (-1)^\epsilon \cos \frac{2kl\pi}{n} \end{pmatrix}, 1 \leqslant l \leqslant \frac{n-1}{2}$$