Une représentation irréductible de $\mathfrak{S}_n$ de degré $n-1$.

Soit $G = \mathfrak{S}_n$. Soit $(e_1, ..., e_n)$ la base canonique de $\mathbb{C}^n$.
Pour tout $g \in G$, on pose $\rho(g)$ l'application linéaire $\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ telle que

$$\forall\, 1 \leqslant i \leqslant n,\ \rho(g)(e_i) = e_{g(i)}\ .$$

Remarque. $\forall\, (x_1, ..., x_n \in \mathbb{C}^n,\ \rho(g)(x_1, ..., x_n) = (x_{g^{-1}(1)}, ..., x_{g^{-1}(n)})$.
Soit $V = \{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{C}^n\ :\ x_1 + ... + x_n = 0\}$.
On pose $\rho_V : G \to \mathrm{GL}(V)$, $g \mapsto \rho(g)|_V$.

Théorème. La représentation ρ_V est irréductible de degré $n-1$.

Démo. Les vecteurs $e_1 - e_2, ..., e_{n-1} - e_n$ forment une base de V.
Soit $0 \neq W \leqslant V$ tel que $\forall\, g \in G$, $\rho(g)(W) \leqslant W$.
Soit $0 \neq w = x_1e_1 + ... + x_ne_n \in W$. Il existe $1 \leqslant i < j \leqslant n$ tel que $x_i \neq x_j$. Sinon on aurait $x_1 = ... = x_n \Rightarrow w = (x_1, ..., x_1) \Rightarrow nx_1 = 0$ (car $w \in V$) $\Rightarrow x_1 = 0 \Rightarrow w = 0$ *absurde !*
Soit $\tau = (ij) \in G$.
On a $\rho(\tau)(w) - w \in W$. Or,

$$\begin{aligned}\rho(\tau)(w) - w &= x_1e_1 + ... + x_je_i + ... + x_ie_j + ... + x_ne_n - (x_1e_1 + ... + x_ie_i + ... + x_je_j + ... + x_ne_n) \\ &= (x_j - x_i)(e_i - e_j)\ .\end{aligned}$$

Donc $x_i \neq x_j \Rightarrow e_i - e_j \in W$.
Soit $s \in G$ tel que $s(i) = 1$, $s(j) = 2$. On a :

$$\rho(s)(e_i - e_j) = e_1 - e_2 \in W\ .$$

De même, $e_2 - e_3, ..., e_{n-1} - e_n \in W$.
Donc $W = V$. □