Université Claude Bernard Lyon 1
Master 1 de mathématiques : Algèbre
Année 2021–2022

Partiel 1 - 13 octobre 2021

Durée : 2 h

L'usage de tout document et de tout matériel électronique est interdit.

L'énoncé comporte trois exercices et deux pages.

Exercice 1 (Théorème de Cauchy)**.** Le but de cet exercice est de démontrer le théorème de Cauchy suivant : *si G est un groupe fini d'ordre n et p est un nombre premier qui divise n, alors G contient au moins un élément d'ordre p.*
On considère un groupe fini G d'ordre n divisible par un nombre premier p. On note e le neutre de G.
Soit H le sous-groupe $\langle\gamma\rangle$ de $\mathfrak{S}_p$ engendré par le p-cycle $\gamma = (1\,2\,\cdots\,p)$.
On fait agir H sur l'ensemble G^p des p-listes de G par

$$\sigma \cdot (g_1, \dots, g_p) = (g_{\sigma(1)}, \dots, g_{\sigma(p)}).$$

Posons $X = \big\{(g_1, \dots, g_p) \in G^p : \ g_1 \cdots g_p = e\big\}$.

1. Vérifier que X est stable sous l'action de $\langle\gamma\rangle$, puis que chacune des orbites est de cardinal 1 ou p.
2. Calculer $|X|$ et en déduire que $|X|$ est divisible par p.
3. Déduire des questions précédentes qu'il existe au moins $p-1$ orbites de taille 1 différentes de $\{(e, \dots, e)\}$.
4. Conclure.

Exercice 2 (Formule de Burnside et application)**.**

1. Soit G un groupe fini agissant sur un ensemble fini X. On note X/G l'ensemble des orbites sous cette action, et, pour chaque élément g de G, on note X^g l'ensemble de ses points fixes. Démontrer la formule de Burnside :

$$|X/G| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |X^g| \,.$$

2. On admet que le groupe G des isométries directes du cube est isomorphe au groupe symétrique $\mathfrak{S}_4$. Un isomorphisme est induit par l'action de G sur les quatre grandes diagonales.
   (a) Décrire les coloriages des sommets d'un cube en trois couleurs par un ensemble X et une action de G sur X.
   (b) Pour g dans G, établir une relation entre le nombre de points fixes $|X^g|$ et, entre autres, les orbites du groupe $\langle g\rangle$ engendré par g agissant sur les sommets du cube.
   (c) Pour g dans G, justifier que $|X^g|$ ne dépend que de la classe de conjugaison de g.
   (d) Démontrer enfin que le nombre de coloriages des sommets d'un cube en trois couleurs, comptés à isométrie directe près, est 333.

Exercice 3 (Une représentation de $\mathfrak{S}_3$). On considère le groupe $\mathfrak{S}_3$ d'ordre 6. On rappelle qu'il est engendré par $(1\,2\,3)$ et $(1\,2)$ et on admettra que si un groupe H contient deux éléments R et S d'ordres respectifs 3 et 2 tels que $SRS = R^{-1}$, il existe un morphisme $\phi : \mathfrak{S}_3 \to H$ tel que $\phi((1\,2\,3)) = R$ et $\phi((1\,2)) = S$.

1. Vérifier qu'il existe une représentation $\rho : \mathfrak{S}_3 \to \mathrm{GL}_3(\mathbb{C})$ telle que

$$\rho((1\,2\,3)) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \rho((1\,2)) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

2. (a) Énoncer le théorème de Maschke.
   (b) Justifier rapidement que si ρ n'est pas irréductible, elle contient une sous-représentation de degré 1.
   (c) Démontrer que dans une telle sous-représentation, la restriction de $\rho((1\,2\,3))$ admet une valeur propre réelle.
3. Déterminer les espaces propres de $\rho((1\,2))$, puis l'ensemble des vecteurs propres communs à $\rho((1\,2\,3))$ et $\rho((1\,2))$.
4. En déduire que $(\mathbb{C}^3, \rho)$ admet une unique sous-représentation irréductible (V_1, ρ_1) de dimension 1 que l'on explicitera.
5. En déduire qu'il existe une sous-représentation irréductible (V_2, ρ_2) de dimension 2 de $(\mathbb{C}^3, \rho)$ telle que $\mathbb{C}^3 = V_1 \oplus V_2$.
6. En considérant une base (e'_1, e'_2, e'_3) de $\mathbb{C}^3$ tel que $e'_1 \in V_1$, déterminer une représentation $\rho'_2 : \mathfrak{S}_3 \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ isomorphe à (V_2, ρ_2) en calculant des matrices pour $\rho'_2((1\,2\,3))$ et de $\rho'_2((1\,2))$.