Université Claude Bernard Lyon 1
Master 1 de mathématiques : Anneaux, corps et représentations
Année 2022–2023

Partiel - 25 octobre 2022

Durée : 2 h

L'usage de tout document et de tout matériel électronique est interdit.
Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction.

Exercice 1 (Table de caractères du groupe diédral D_6)**.**
On se place dans le plan euclien $\mathbb{R}^2$ muni du repère orthonormé direct (O, e_1, e_2) où $O = (0,0)$, $e_1 = (1,0)$ et $e_2 = (0,1)$.

I. Hexagone régulier et deux premières isométries.
On considère l'hexagone régulier H de sommets S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6 d'affixes respectifs $e^{i\pi/3}$, $e^{2i\pi/3}$, $e^{3i\pi/3}$, $e^{4i\pi/3}$, $e^{5i\pi/3}$, $e^{6i\pi/3}$.

1. Repésenter graphiquement à la règle et au compas cet hexagone.

On note r la rotation de centre O et d'angle $\pi/3$, et s la reflexion par rapport à l'axe des abscisses. Ce sont deux isométries de H.

2. Exprimer r et s comme fonctions de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ qui à l'affixe z d'un point associe l'affixe de son image.

On identifie également les isométries de H à des permutations de ses sommets.

3. Expliciter les permutations de $\mathfrak{S}_6$ qui correspondent à r et s.

II. Groupe diédral D_6.
On note D_6 le groupes des isométries de H. On admettra que

$$D_6 = \langle r, s \rangle = \{\mathrm{id}, r, r^2, r^3, r^4, r^5, s, rs, r^2s, r^3s, r^4s, r^5s\}.$$

1. Représenter les axes des réflexions appartenant à D_6 en les légendant.
2. Montrer (à la manière de votre choix) que $sr = r^{-1}s$.
3. Expliciter les six classes de conjuguaison de D_6.

III. Caractères linéaires de D_6.

1. Exhiber quatre caractères linéaires distincts de D_6. (Les caractères linéaires sont les caractères de degré 1.)
2. Jusitifier que ce sont les seuls.

IV. Deux représentations de degré 2.
On considère la représentation matricielle « naturelle » de D_6 suivante :

$$\begin{array}{rccl} \rho : & D_6 & \longrightarrow & \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) \subseteq \mathrm{GL}_2(\mathbb{C}) \\ & u & \longmapsto & \mathrm{Mat}_{e_1,e_2}(u) \end{array}$$

1. Montrer que cette représentation est irréductible.

On considère également l'application

$$\begin{array}{rccl} \varphi : & D_6 & \longrightarrow & D_6 \\ & r^k & \longmapsto & r^{2k} \\ & r^k s & \longmapsto & r^{2k} s \end{array}$$

2. Vérifier que φ est un morphisme de groupes.
3. Montrer que $\rho \circ \varphi$ définit une seconde représentation matricielle irreductible.

IV. Table de caractères de D_6 : Dresser et compléter la table de caractères de D_6.

V. Table de caractères de D_6 (bis).

On se propose de retrouver cette table de caractère par une autre méthode.

1. Soit $\pi : G \to H$ un morphisme surjectif de groupes. Montrer que tout caractère irréductible χ' de H induit un caractère irréductible $\chi' \circ \pi$ de G.
2. En remarquant que $\varphi(D_6) = D_3$, groupe des isométries du triangle équilatéral $S_2S_4S_6$ et en utilisant les caractères du groupe $\mathfrak{S}_3$, retrouver trois caractères de D_6.
3. À l'aide de l'un des caractères linéaires de D_6, retrouver l'ensemble des six caractères irréductibles de D_6.

Exercice 2 (Anneaux commutatifs et idéaux)**.**

Dans cet exercice on ne considérera que des anneaux unitaires commutatifs.

1. Montrer que l'ensemble des éléments nilpotents d'un anneau commutatif forme un idéal.
2. On considère un élément p irréductible dans un anneau principal. Montrer que l'idéal (p) est maximal. Donner un contre-exemple dans le cas où l'anneau n'est pas principal.
3. On note $\mathbb{Z}[i]$ l'anneau des entiers de Gauss, c'est-à-dire le sous-anneau de $\mathbb{C}$ suivant :

$$\mathbb{Z}[i] = \{a + ib\colon a, b \in \mathbb{Z}\}.$$

   Montrer que l'anneau quotient $\mathbb{Z}[X]/(X^2 + 1)$ est isomorphe à $\mathbb{Z}[i]$.