XI. — Sur les corps de décomposition

Exercice 1 a) Soit f un polynôme de degré n sur un corps K. On note ses racines $x_1, ..., x_n$. Montrer que

$$[K(x_1, ..., x_n) : K] \leqslant n! \ .$$

b) Montrer que

$$[K(x_1, ..., x_n) : K] \,|\, n!$$

par récurrence sur $n \geqslant 1$.

c) Déterminer le corps de décomposition de $X^3 - 2$ sur $\mathbb{Q}$.

d) Soit α une racine de $X^3 - 3X + 1$. Montrer que $\alpha^2 - 2$ est aussi racine. En déduire le degré du corps de décomposition de $X^3 - 3X + 1$ sur $\mathbb{Q}$.

e) Soit α une racine de $P = X^4 - 10X^2 + 1$. Montrer que les racines de P sont $\pm\alpha, \pm\alpha^{-1}$ et en déduire le degré du corps de décomposition sur $\mathbb{Q}$.

f) Déterminer le corps de décomposition de $X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$ sur $\mathbb{Q}$.

g) Déterminer le corps de décomposition de $X^4 - 2$ sur $\mathbb{Q}$ et ses degrés sur $\mathbb{Q}$ et sur $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$.

h) Soient x_1, x_2, x_3, x_4 les racines de $P = X^4 - X - 1$.
On pose

$$t_1 = (x_1 + x_2)(x_3 + x_4),\ t_2 = (x_1 + x_3)(x_2 + x_4),\ t_3 = (x_1 + x_4)(x_2 + x_3) \ .$$

Vérifier que

$$(X - t_1)(X - t_2)(X - t_3) = X^3 + 4X + 1$$

(Indication. $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \Rightarrow t_1 = -(x_1 + x_2)^2$, $t_2 = -(x_1 + x_3)^2$, $t_3 = -(x_1 + x_4)^2$ *...)* et en déduire que $[\mathbb{Q}(x_1, x_2, x_3, x_4) : \mathbb{Q}] \geqslant 12$. *Indication. Montrer d'abord que* $[\mathbb{Q}(t_1, t_2, t_3) : \mathbb{Q}] = 6$.

i) Vérifier que

$$\Delta := \left((x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_1 - x_4)(x_2 - x_3)(x_2 - x_4)(x_3 - x_4)\right)^2 = -283\,,$$

montrer que $X^4 - X - 1$ est irréductible sur $\mathbb{Q}\left(\sqrt{-283}\right)$ et en déduire que

$$[\mathbb{Q}(x_1, x_2, x_3, x_4) : \mathbb{Q}] = 24 \ .$$

(Indication. $\Delta = P'(x_1)P'(x_2)P'(x_3)P'(x_4)$*. De plus, comme* $(x_1 + x_2)^2 = -t_1$ *est de degré* 3 *sur* $\mathbb{Q}$, $x_1 + x_2 \notin \mathbb{Q}(\sqrt{-283}) \Leftarrow t_1 \notin \mathbb{Q}(\sqrt{-283})$*, extension de degré* 2*. En particulier* $(X - x_1)(X - x_2) \notin \mathbb{Q}(\sqrt{-283})[X]$*, de même pour les autres facteurs unitaires de degré* 2 *de* $X^4 - X - 1$ *...)*

Exercice 2 Unicité des corps de décompositions.

Soit f un polynôme unitaire de degré n sur un corps K. Soient $L_1 = K(x_1, ..., x_n)$ et $L_2 = K(y_1, ..., y_n)$ deux corps de décompositions de f sur K.

a) Soit I l'idéal de $K[X_1, ..., X_n, Y_1, ..., Y_n]$ engendré par les polynômes $P \in K[X_1, ..., X_n]$ tels que $P(x_1, ..., x_n) = 0$ dans L_1 et par les polynômes $P \in K[Y_1, ..., Y_n]$ tels que $P(y_1, ..., y_n) = 0$ dans L_2. Montrer qu'il existe un idéal maximal $I \leqslant \mathfrak{m} \leqslant K[X_1, ..., X_n, Y_1, ..., Y_n]$.

b) Montrer qu'il existe des isomorphismes de corps K−linéaires

$$L_1 \simeq K[X_1, ..., X_n, Y_1, ..., Y_n]/\mathfrak{m} \simeq L_2 \ .$$