IV — Table des caractères du groupe alterné $\mathfrak{A}_5$

Soit $G = \mathfrak{A}_5$.

a) Déterminer les classes de conjugaison de G et leurs cardinaux.

b) Soient χ_1 le caractère trivial et χ_2 celui de la représentation de dimension 4 donnée par la permutation des coordonnées de l'hyperplan

$$V = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{C}^5 \ : \ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0\} \ .$$

Montrer que χ_2 est irréductible.

c) Soit $S = \mathbb{C}[X_1, X_2, X_3, X_4, X_5]_2$ l'espace des polynômes homogènes de degré 2. Déterminer $\dim S$. Soit χ_S le caractère de la représentation obtenue par permutation des variables. Déterminer χ_S.

d) Montrer que $\chi_3 := \chi_S - 2\chi_1 - 2\chi_2$ est un caractère irréductible de degré 5.

e) Endéduire qu'il existe deux caractères irréductibles distincts de degré 3 χ_4, χ_5 et compléter la table des caractères :

	1	(123)	(12)(34)	(12345)	(21345)
χ_1	1	1	1	1	1
χ_2	4	1	0	-1	-1
χ_3	5				
χ_4	3				
χ_5	3				

Remarques.

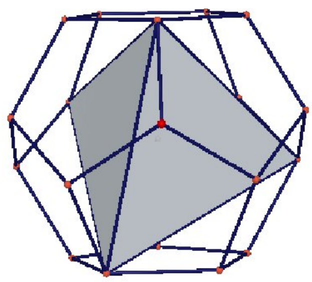
a) En faisant agir G sur ses 6 sous-groupes d'ordre 5, on trouve un morphisme $G \to \mathfrak{S}_6$, $(12345) \mapsto (24613)$, $(123) \mapsto (134)(256)$. On en déduit une représentation irréductible de degré 5 de G par restriction d'une de $\mathfrak{S}_6$.

b) Voici une représentation irréductible de G de degré 3.

$$(12345) \mapsto \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\tau & \tau^{-1} \\ \tau & \tau^{-1} & -1 \\ \tau^{-1} & 1 & \tau \end{pmatrix}, \ (123) \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

où $\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

c) L'automorphisme $G \to G$, $g \mapsto (12)g(12)$ permet de passer de χ_4 à χ_5.



Le dodécaèdre de sommets $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$, $(\pm\tau^{-1}, \pm\tau, 0)$, $(0, \pm\tau^{-1}, \pm\tau)$, $(\pm\tau, 0, \pm\tau^{-1})$